

1. Forme di conoscenza «ex ante» ed «ex post»: alcune antinomie

di Vittorio Emanuele Ferrante

*Ma se è evento, che bisogno c'è di dei?
E se degli dei è il potere, l'evento non è più nulla.*
Euripide, *Ipsipile*

Introduzione

Il concetto di equilibrio, nella sua versione più astratta e minimale di insieme di condizioni di coerenza reciproca di comportamenti individuali distinti, che la teoria economica oggi quotidianamente utilizza, svolge, com'è noto, funzioni euristiche plurime. La cristallizzazione formale del concetto nella nozione di equilibrio di Nash è infatti talvolta caricata di valenza interpretativa *ex post*, e usata a spiegazione di accadimenti osservabili, ad esempio nell'ambito della filosofia sottostante modelli «evoluzionistici»; talaltra, invece, con intenti più ambiziosi di prescrizione, ovvero di previsione di esiti generati da comportamenti qualificabili in vario modo, ma sempre, nelle intenzioni, non tautologicamente «razionali», essa assume valenza *ex ante*: paradigmaticamente, tale è l'uso che ne hanno fatto i teorici delle «aspettative razionali» nel tentativo di trovarvi condizioni sufficienti a una riduzione sistematica di esiti collettivi alla razionalità individuale dei singoli agenti. Le tematiche di incertezza, o di indeterminatezza, di origine genericamente keynesiana, o, a preferenza, hayekiana, e emergenti dalla considerazione delle circostanze strategiche dell'agire economico, trovarono così, sempre nelle intenzioni, una ricomposizione; né le successive critiche, provenienti dall'«economia dell'informazione», che complicando la struttura decisionale con vincoli e qualificazioni, enfatizzano le conseguenze di asimmetrie e discriminazioni informative di vario tipo, indipendentemente dagli specifici esiti che vengono in tal modo selezionati, ci pare problematizzino tale lettura *ex ante* della nozione fondamentale di equilibrio.

Tuttavia, un recupero dell'«incertezza», che l'economia dell'infor-

Questa ricerca è stata presentata anche all'VIII Convegno di Teoria dei giochi e applicazioni, Genova 26-27 novembre 1993 e al Convegno internazionale «Epistemic Logic and the Theory of Games and Decisions», Marsiglia 24-28 gennaio 1994 presso il CIRM.

mazione forse non compie del tutto, potrebbe passare proprio da una distinzione tra *ex ante* ed *ex post*; questa ci appare allora troppo fondamentale e qualificante per essere lasciata, non analizzata, al momento della pratica di utilizzazione del modello.

D'altra parte, l'accertamento dell'esistenza di condizioni, come diremo, epistemiche individuali sufficienti, nel senso che abbiamo visto, è oggi oggetto di indagine fondamentale nell'ambito del progetto teorico di riduzione della teoria della soluzione di giochi a una struttura di teoria delle decisioni razionali individuali plurime. È con questa chiave di lettura che dovrà innanzitutto essere considerata la richiesta essenziale che viene avanzata di «conoscenza comune», ai giocatori, del modello di gioco che descrive le circostanze della loro interazione strategica¹.

A illustrazione della necessità di tale richiesta, possiamo considerare il caso di due giocatori il cui comportamento si coordini su un segnale. Qui ciascuno dei due, per selezionare una strategia in funzione del segnale ricevuto, dovrà supporre che l'altro faccia lo stesso, quale che sia la conoscenza specifica che il primo abbia del particolare segnale ricevuto dal secondo. Entro una logica di teoria delle decisioni, ciò conduce a una ben nota sequenza di postulati: ad ogni passo della sequenza, che risulterà di necessità non finita, una stringa finita, a descrizione di «*i* sa che *j* sa che ...», terminerà con un oggetto di conoscenza che assumerà forma di «... che *i* sa che *j* gioca in funzione del segnale», con il che si richiederà una ulteriore ipotesi a sostegno di tale postulato comportamento di *j*, che altrimenti resterebbe ingiustificato, e una stringa più lunga. Per esprimerci per ora vagamente, diremo che lasciare che la sequenza sia non finita eviterà la necessità di ulteriori allungamenti. La congiunzione logica infinita di tali elementi di conoscenza è ritenuta sufficiente a costituire il desiderato sostegno conoscitivo al coordinamento dei comportamenti.

Osserviamo innanzitutto una caratteristica «negativa» di tale procedimento concettuale, che ne configura la natura come una sorta di *constructio per absurdum*. Ciascuna successiva stringa nella costruzione della sequenza non è infatti inferibile da, e così giustificabile con la precedente; la postulazione di ogni stringa è invece ammissibile solo tramite una postulazione successiva ulteriore, con un processo innanzitutto non finito.

A prescindere perciò, per ora, dalla questione dell'effettiva sufficienza di tale sequenza come sopra configurata, l'intera sua postula-

¹ Si veda, ad esempio, Aumann [1987b, 472-3].

zione richiederà, ci pare, una qualche giustificazione. Dal momento che ciascuna stringa trova presupposto solo nel suo successore nella sequenza, il senso di tale postulazione potrà forse consistere in una idea di pre-esistenza del cammino infinito che, per così dire, viene solo ripercorso. Sarà quindi quanto mai opportuno sussumere tale requisito ontologico nell'individuazione di uno o più meccanismi procedurali il cui operare sia in grado di generare la voluta sequenza.

È forse bene sottolineare ancora la dipendenza concettuale di tali complesse richieste dal progetto teorico di individualismo metodologico cui abbiamo accennato, che resta distinto, riteniamo, da approcci alternativi diversamente *ex ante*, per i quali anche, ma con diversa filosofia di sostegno, la nozione di equilibrio di Nash seleziona esiti in modo simile alle «convenzioni» economiche e sociali, le quali possono indurre individui ad adattarvisi per il solo loro essere norme accettate: con gioco di parole, potremmo dire che di fronte ad esse agli individui resta spesso ben poco da scegliere.

Lasciando ora sullo sfondo considerazioni di quest'ultimo tipo, desideriamo concentrarci in questo lavoro nell'esame di due diverse e alternative situazioni astrattamente «empiriche», ambedue emergenti da una stessa circostanza di «punto fisso» tra accadimenti e consapevolezza di essi. Intendiamo in tal modo restare all'interno di un esame delle modalità di conoscenza che individui possono ottenere nelle diverse situazioni che si trovino a vivere.

La prima «situazione stilizzata» consiste in accadimenti «pubblici», ossia occorsi alla presenza di individui «consapevoli», e capaci perciò di cogliere l'identità fattuale tra l'accadimento testimoniato e la propria testimonianza: tale circostanza consentirà lo sviluppo di elementi di conoscenza *ex post* riguardanti l'accadimento e la conoscenza di esso. L'avvenimento, com'è chiaro, resta in sé libero da quali e quanti elementi di conoscenza vengano in tal modo effettivamente elaborati.

Peraltro, la definizione di una prefigurazione di esiti di equilibrio da parte di ciascun singolo giocatore difficilmente potrà essere costruita per mezzo di tale schema: ove un esito possibile, preliminarmente privo di determinazioni, venga visto da ciascun decisore come il futuro prodotto della attività decisionale propria e dei propri avversari, non si potrà a fini prefigurativi far ricorso alla identità di avvenimenti summenzionata. Ciascun giocatore *i* dovrà allora (e potrà solo) riflettere sulla riflessione del proprio avversario sul comportamento di *i* stesso in funzione del segnale, e sulla stessa riflessione di *i*, di nuovo generando una sequenza non finita di stringhe, e la costruzione di ciascuna di essa si svilupperà per apposizione di un ulteriore simbolo

di consapevolezza alla stringa che la precede nella sequenza. Espri-
mendoci di nuovo vagamente, diremo che non dar termine a questo
processo potrà forse esaurire tutto ciò che è possibile prefigurare, per
riflessione razionale, delle conoscenze *ex ante* di un esito del gioco di
cui si delinea con ciò una previsione.

Seppure le conoscenze elaborabili secondo il primo schema di si-
tuazione prevedono che il giocatore sia in posizione di osservatore
esterno dell'accadimento e delle circostanze conoscitive di esso, il
punto di vista di osservatore fa sì che le determinazioni epistemiche
raggiunte siano generate per analisi di proprietà *interne* all'oggetto os-
servato, e per questo definiremo interna la conoscenza comune che
venga raggiunta per questa via. Nell'altro caso, invece, il decisore re-
sta in posizione interna al gioco, e tuttavia aggiunge, per propria ri-
flessione, proprietà ulteriori al suo oggetto di riflessione, generando
così, in ultimo, una conoscenza comune che definiamo *esterna*.

Un programma teorico che ci pare particolarmente ambizioso
consiste nel forzare in ciascun giocatore le conoscenze ottenibili da un
osservatore del gioco, ovvero dal *game theorist*: naturalmente, ove la
conoscenza che il teorico è in grado di desumere dalla propria analisi
fosse trasferita ai giocatori, questi beneficerebbero dei teoremi così
derivati utilizzandoli a guida della propria condotta. In termini astratti,
l'analisi, compiuta da un osservatore, dell'oggetto matematico che
rappresenta le conoscenze degli agenti, può essere pensata come una
descrizione delle costruzioni degli agenti stessi; d'altra parte, di nuo-
vo, se tali costruzioni configurano di un esito una prefigurazione com-
pleta, contenendone tutti gli elementi necessari alla realizzazione, fini-
ranno per costituirne una previsione.

In ciò che segue, ci proponiamo principalmente di dare caratteriz-
zazione formale alle distinzioni di conoscenze *ex ante* ed *ex post* che
abbiamo introdotto, definendo strutture che possano rappresentare la
conoscenza comune «interna» e «esterna». L'idea centrale intorno a
cui si sviluppa il nostro tentativo consiste nella distinzione tra modali-
tà intensionale ed estensionale di rappresentare proprietà di oggetti,
in particolare la proprietà che stati del mondo possono avere di esse-
re conosciuti, ossia ritenuti veri, da decisori. La modalità estensionale
è quella consueta per la teoria delle decisioni neo-bayesiana; essa con-
siste nell'identificare una proprietà con l'insieme degli oggetti che la
possiedono: così anche, ad esempio, la proprietà di un evento – ossia
un insieme di stati – di essere ritenuto vero, con l'insieme di stati ai
quali l'evento è ritenuto vero. Nell'altra modalità, invece, una pro-
prietà è concepita come un oggetto astratto che pertiene a singoli og-
getti, ma non è identificabile con la classe di questi. Desideriamo mo-

strare che proprietà epistemiche crucialmente diverse possono essere attribuite allo stesso insieme di stati, individuando con ciò un fallimento della relazione binaria di uguaglianza insiemistica tra eventi di discriminare modi diversi di essere noto.

Preliminarmente, delinearremo nel paragrafo successivo una struttura generale entro cui tali questioni di teoria della conoscenza possano essere collocati e evidenzieremo in particolare le tematiche astratte che emergono dalla necessità di attribuire agli stati del mondo anche le proprietà epistemiche costituenti le circostanze del loro essere variamente noti a decisori.

2. Uno schema generale di riferimento

La struttura di riferimento è articolata, in prima istanza, in tre parti: una struttura «naturale», una «di informazione» e una «di decisione». Vedremo successivamente in che modo le varie parti possano essere identificate.

Il primo oggetto della struttura naturale è un insieme Ω di stati del mondo. Intensionalmente, ogni $\omega \in \Omega$ può essere pensato come un elenco di proprietà «naturali» completo: per ogni p , proprietà che il mondo può possedere, o p o $\neg p$ (la negazione di p) sarà nell'elenco. Si ipotizza in tal modo una totale determinatezza degli stati del mondo, relativamente a una implicita collezione di proprietà naturali – ossia non epistemiche – di riferimento². Possiamo chiamare Ω l'universo degli stati del mondo.

In secondo luogo, sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottinsiemi di Ω . Chiameremo, secondo consuetudine, eventi gli elementi di $\mathcal{F}$. Per un fondamentale principio di estensionalità, le proprietà saranno rappresentate dagli eventi, nel senso duplice che eventi diversi – nel senso della non uguaglianza di insiemi – rappresenteranno (liste di) proprietà diverse, e, soprattutto, viceversa.

Così, se l'evento singoletto $\{\omega\}$ rappresenta tutte le proprietà di ω , l'evento coppia $\{\omega, \omega'\}$ rappresenterà le proprietà comuni a ω e ω' , l'intersezione delle loro proprietà. Le (liste di) proprietà rappresentate decrescono cioè monotonicamente con gli eventi, secondo l'ordinamento sugli eventi indotto dalla relazione di inclusione tra insiemi. Sarà di particolare interesse accertare quali proprietà siano rap-

² Supporremo in prima istanza che non vi sia ridondanza di stati, ossia che, per ogni ω, ω' , esista una p che sia asserita in ω e negata in ω' .

presentate dall'evento massimo Ω , ovvero quale lista minima di proprietà sia comune a tutti gli stati. Non sarà infatti questa la lista vuota, dal momento che ne faranno parte le proprietà (classicamente) tautologiche, o tautologie, quali $p \rightarrow (q \rightarrow p)$, o $\neg \neg p \rightarrow p$. Le tautologie costituiscono le proprietà dell'universo degli stati che diremo strutturali: quale che sia lo stato del mondo che di fatto si realizzi, esso avrà tali proprietà.

Imporremo infine alcune restrizioni più o meno consuete su $\mathcal{F}$:

- 1) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}$
- 2) $\{E_\lambda\}_{\lambda \in A} \in 2^{\mathcal{F}} \rightarrow \bigcap_{\lambda \in A} E_\lambda \in \mathcal{F}$
- 3) $E \in \mathcal{F} \rightarrow -E \in \mathcal{F}$

La 1) prevede che sia l'evento universale che l'evento nullo appartengano a $\mathcal{F}$; la 3) garantisce la chiusura di $\mathcal{F}$ rispetto all'operazione di complementazione; la 2) ne garantisce la chiusura rispetto a una operazione di intersezione massimamente potente, ovvero definita su una collezione arbitraria di eventi appartenenti a $\mathcal{F}$. Queste restrizioni garantiscono naturalmente a $\mathcal{F}$ le proprietà di campo.

La conoscenza delle proprietà dello stato del mondo che si realizza, o meglio le diverse conoscenze alternative che il decisore assume al realizzarsi dei diversi stati, saranno rappresentate ancora estensionalmente, ossia per mezzo di eventi (sottinsiemi di Ω) i cui elementi (stati) condividono le proprietà alternativamente note al decisore. In tal modo, se I è l'evento che rappresenta tutte le proprietà dello stato effettivo note al decisore, e che chiameremo insieme di informazione, egli riterrà con ciò che uno e un solo elemento di I sia lo stato vero, ma non sarà in grado di specificare quale, salvo nel caso estremo, che diremo di conoscenza perfetta, di I singoletto. In ogni caso, mentre le proprietà note al decisore dovranno essere solo quelle comuni ai diversi elementi di I , il decisore potrebbe essere, o non essere, a conoscenza (di parte) delle proprietà strutturali: tale conoscenza non è estensionalmente discriminante e tale suo grado di indeterminatezza non comporterebbe perciò alcuna modificazione dell'insieme di informazione. Per garantire una buona corrispondenza tra proprietà ed eventi, ossia la validità del principio di estensionalità, anche nel caso della formalizzazione della conoscenza si ipotizza comunque la conoscenza da parte del decisore di tali proprietà strutturali, quali che siano poi le conoscenze specifiche da esso ulteriormente possedute e rappresentate in modo stretto dall'insieme d'informazione. Nell'altro caso estremo di conoscenza minima descritto da un insieme di informazione uguale a Ω , al decisore resterà pertanto la conoscenza di tutte e sole le tautologie.

La struttura di informazione sarà dunque composta in primo luogo da una famiglia di eventi $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$, ciascuno dei quali sarà un insieme d'informazione rappresentante le conoscenze massimali³ che, alternativamente, in funzione dello stato effettivo, possiederà il decisore. Tradizionalmente, si ipotizza che $\mathcal{I}$ sia una partizione $\mathcal{P}$ di Ω , ossia una famiglia di insiemi che sia ad un tempo una copertura e un ritaglio di Ω : in tal modo, rispettivamente, per ogni $\omega \in \Omega$, esisterà un $P \in \mathcal{P}$ tale che $\omega \in P$; e se $\omega \in P$ e $\omega \in P'$, $P' \in \mathcal{P}$, allora $P=P'$.

In secondo luogo, definiamo una funzione d'informazione $\iota: \Omega \rightarrow \mathcal{I}$, a rappresentare la relazione tra lo stato del mondo che si realizza e la conoscenza che in seguito a questo acquisisce il decisore: $\iota(\omega) = I_\omega$. Tale funzione è più spesso implicitamente definita dalla relazione insiemistica di appartenenza tra lo stato del mondo effettivo e l'insieme di informazione di cui esso è elemento: tale consuetudine equivale però ad assumere surrettiziamente la veridicità delle conoscenze del decisore.

Per concludere, introduciamo sinteticamente gli elementi di una struttura di decisione. Sia O un insieme di esiti, e $\mathcal{S}$, una famiglia di sottinsiemi di O , le strategie del giocatore⁴; sia poi $\gamma: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{I}$ una funzione di scelta. Definiamo ora dalla ι una funzione (parziale) di tipo di giocatore, $\tau: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{I}$ il cui dominio sia l'insieme delle immagini inverse della ι , $\mathcal{S} = \{I_\omega^{-1}\}_{\omega \in \Omega} \subset \mathcal{S}$, e tale che $\tau(I_\omega^{-1}) = (\omega)$. Componendo allora la funzione di scelta con la funzione di tipo, resterà definita una funzione parziale di realizzazione, $e: \gamma \circ \tau: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Se accettiamo poi la dottrina alla base dell'impianto teorico di Aumann [1987a], di portata sufficientemente «fondamentalista» da costituire una vera e propria «dottrina di Aumann», potremo identificare gli eventi immagini inverse della τ con l'insieme delle strategie: $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Di conseguenza, una restrizione di «equilibrio» sulla funzio-

³ Questa massimalità di $I \in \mathcal{I}$ comporta che per ogni E tale che $I \subseteq E$, anche E rappresenta (un sottinsieme di) proprietà note al decisore. In tal modo, i diversi elementi del filtro generato da I sono le rappresentazioni di sottoliste di proprietà note al decisore. Abbiamo già osservato che la sottolista più piccola così rappresentabile (da Ω) è quella delle tautologie.

⁴ Tipicamente, $\mathcal{S}$ sarà l'insieme delle fibre di O , gli elementi di ciascuna delle quali prevedono una stessa mossa del giocatore.

⁵ E quindi anche $\Omega = O$. Lo (evento dello) stato effettivo potrà essere l'intersezione degli insiemi d'informazione fattuali di tutti i giocatori; l'(evento dell')esito del gioco l'intersezione delle strategie. Siamo tentati di sovrapporre la «dottrina di Aumann», che identifica le circostanze dell'agire con le azioni (ben altro che concepire l'agire altrui come circostanza del proprio), con il tentativo di (con)fondere *ex ante* ed

ne di realizzazione, e^* , definirà una funzione di scelta d'equilibrio variabile con ι, γ^* , soddisfacente la condizione che e^* sia una funzione parziale identica sullo spazio degli eventi: $e^*: id(\mathcal{F})$.

La struttura completa è dunque: $\langle \Omega, \mathcal{F}, \cap, -, \mathcal{I}, \iota, O, \mathcal{S}, \gamma \rangle$.

3. Dalla struttura di informazione alle «proprietà epistemiche»

Abbandonando l'analisi del progetto riduzionistico filosoficamente più ambizioso, incentrato sul collasso dell'intera struttura in un insieme di eventi con una funzione identica definita su di esso (accennato al termine del precedente paragrafo), ci interessiamo ora all'altro progetto di riduzione delle conoscenze, che decisori abbiano delle proprietà del mondo, a proprietà «epistemiche» del mondo stesso.

La riduttività di quest'ultimo progetto sta in questo: che *il conoscere* diviene *ciò che* si conosce; ma che *il sapere che* avversari fanno – prima ancora del *sapere ciò che* gli avversari fanno – sia cruciale per un giocatore è, almeno in linea di buon senso, pacifico, come abbiamo visto sopra col gioco di segnale. Anzi, la conoscenza comune è proprio questo; la formalizzazione bayesiana – ed estensionale – della conoscenza comune appunto questo deve dirimere.

La formalizzazione della conoscenza comune oggi standard in teoria dei giochi ha origine con Aumann [1976]. Siano $\mathcal{P}_i$ e $\mathcal{P}_j$ le due partizioni informative di Ω dei giocatori i e j . Sia $\mathcal{P}_i \vee \mathcal{P}_j$ la partizione di Ω che sia il più piccolo ingrossamento comune delle due partizioni informative, ossia tale che per ogni $P_i \in \mathcal{P}_i$ e ogni $P_j \in \mathcal{P}_j$, esisterà un $P_{i \vee j} \in \mathcal{P}_i \vee \mathcal{P}_j$ tale che $P_i \subseteq P_{i \vee j}$ e $P_j \subseteq P_{i \vee j}$, e tale che per ogni $E \in \mathcal{F}$ per cui anche $P_i \subseteq E$ e $P_j \subseteq E$, allora $P_{i \vee j} \subseteq E$. Si dirà allora che gli elementi di $\mathcal{P}_i \vee \mathcal{P}_j$ rappresentano le alternative conoscenze comuni (dipendenti dallo stato che si realizza) dei due giocatori.

Indipendentemente dalla superabile particolarizzazione della definizione originaria di Aumann al caso di strutture d'informazione che siano partizioni, colpisce l'identificazione delle conoscenze comuni ai due giocatori con le conoscenze che ambedue hanno, a prescindere da come possa ciascuno dedurre, dal sapere *ciò che* l'altro sa, il sapere *che* l'altro sa⁶. Indubbiamente, tra le proprietà note a ciascun giocato-

ex post affidando al giocatore *qua* decisore le capacità di analisi di un osservatore del gioco.

⁶ Con riferimento alla nota 3 sopra, $P_{i \vee j}$ rappresenterà infatti una lista di proprietà note contemporaneamente ad ambedue.

re, e rappresentate dal suo insieme d'informazione, non vi sono qui le conoscenze dell'altro, poiché tra gli elementi dell'insieme d'informazione dell'un giocatore non vi sono gli insiemi d'informazione alternativi dell'altro.

È per questo motivo che questa definizione formale di conoscenza comune avrà comunque bisogno di una implicita «informale» ipotesi di conoscenza comune delle strutture d'informazione stesse che suscita ovvie perplessità sulla validità della ricercata rappresentazione formale. Diciamo però subito che tale problema è affrontabile per mezzo di strumenti matematici di uso diffuso, come è stato fatto anche dallo stesso ideatore della prima formalizzazione della conoscenza comune [Aumann 1992]⁷.

Per illustrare il problema, possiamo pensare di inscrivere la struttura d'informazione del decisore nella specificazione degli stati semplicemente «appendendo» al generico ω un elenco di insiemi di informazione che costituiscano conoscenze massimali alternative ai diversi stati: $\{I_\omega, I_{\omega'}, I_{\omega''}, \dots\}_\omega$. In tal modo la realizzazione di ω porterà con sé anche quella di una struttura d'informazione⁸. Accadrà peraltro che, di questa realizzazione, solo quella dell'insieme d'informazione I_ω , che diremo fattuale, sarà, per così dire, efficace; gli altri insiemi, controfattuali, descriveranno infatti quello che il decisore *avrebbe saputo* se lo stato del mondo fosse stato un altro. D'altra parte, l'insieme d'informazione $I_{\omega'}$, diciamo, che nell'elenco di ω è un controfattuale, sarà fattuale nel diverso elenco «appeso» a ω' . Se poi accadrà che, con notazione ovvia, $(I_{\omega'})_{\omega'} \neq (I_{\omega'})_{\omega}$, avremo un caso di incoerenza della struttura d'informazione⁹. Ove invece siano rispettate tutte le restrizioni di coerenza, avremo realizzato la cercata internalizzazione della unica prefissata struttura d'informazione nella specificazione degli stati del mondo. Infine, tale specificazione, poiché invariante

⁷ Registriamo tuttavia alcune incongruenze: «[L]e partizioni informative... sono esse stesse conoscenza comune. Di fatto, ciò non costituisce perdita di generalità. Compreso nella descrizione completa di uno stato del mondo ω è il modo in cui l'informazione viene impartita ai due individui». [Aumann 1976, 1237.] «Una partizione non è un evento; formalmente, il concetto di conoscenza e di conoscenza comune non [vi] si applicano...; quando ci riferiamo a partizioni come "conoscenza comune"... "conoscenza" ha il suo quotidiano significato *informale*». [Aumann 1987a, 40, corsivi aggiunti.]

⁸ Tralasciamo per brevità la necessità dell'iscrizione della funzione d'informazione, che sarebbe trattabile in modo analogo come insieme di coppie ordinate.

⁹ La struttura che stiamo qui discutendo è dunque più ricca di quella introdotta sopra al paragrafo 2: $\mathcal{I}$ sarà qui la collezione degli insiemi d'informazione fattuali.

in Ω , assume natura di proprietà strutturale dell'universo, e ne viene quindi garantita la conoscenza ai giocatori.

Due ordini di questioni si aprono a questo punto. La prima, di natura estensionale, riguarda la possibile variabilità della struttura d'informazione in Ω . L'altra, intensionale, riguarda la «profondità» della specificazione della struttura d'informazione, pur prefissata.

La raggiunta iscrizione di proprietà epistemiche nella specificazione degli stati del mondo potrà forse essere una sufficiente descrizione *ex post* delle condizioni informative a «razionalizzazione» di un comportamento osservato e che possiamo pensare realizzatosi con un certo stato del mondo effettivo. Peraltro, secondo buon senso, le modalità di ricezione del segnale da parte di un avversario possono essere *ex ante* non note al generico giocatore in posizione decisionale¹⁰. Bayesianamente, tale incertezza si dovrà tradurre in una opportuna specificazione della struttura informativa: l'insieme di informazione di un decisore raccoglierà allora stati del mondo, con annesse descrizioni di diversi insiemi d'informazione di altri decisori senza che il primo decisore possa discriminare tra essi. Tuttavia una caratterizzazione completa dell'incertezza *ex ante* richiederà che *tutti* gli insiemi d'informazione che un avversario può avere siano così descritti. Ciò richiede che la cardinalità di Ω sia uguale a quella dell'insieme delle sue parti, cosa notoriamente impossibile.

Certamente, l'insieme Ω di partenza, cioè i cui elementi siano ancora spogli delle «proprietà epistemiche», potrà essere reso ridondante, per appendere a «copie» di uno stesso ω descrizioni di strutture d'informazione diverse,¹¹ e ciò potrà consentire di accomodare tutti i diversi insiemi d'informazione fattuali i cui elementi sarebbero classi di equivalenza di liste di proprietà naturali, secondo una relazione di identità delle liste; ma dovremo ancora porci il problema dei sottosinsiemi di questo nuovo, più grande, universo, poiché non solo è rilevante che i giocatori conoscano o meno la struttura d'informazione di tutti, ma anche che tutti sappiano di saperla o no, e così via.

In altre parole, la descrizione dell'incertezza *ex ante* è comunque necessariamente limitata a un certo livello, oltre il quale sarà necessario «chiudere» imponendo, per così dire, la postulazione di «convenzioni» mai incerte, pena incorrere nella classica antinomia di cardina-

¹⁰ Tralasciamo di chiederci se anche le *proprie* modalità di ricezione possano essere ignote.

¹¹ «Se ci fosse incertezza su [le partizioni informative dell'avversario]... bisognerebbe scindere ω in più stati, a seconda di quali stati fossero [per il decisore] indistinguibili da ω » [Aumann 1987a, 9].

lità della teoria ingenua degli insiemi cantoriana che contempla l'esistenza dell'insieme di tutti gli insiemi, contenente quindi anche le parti di sé stesso.

In questa stratificazione, fino e oltre il livello di «chiusura» di tali questioni estensionali, nascono però ulteriori questioni, di tipo intensionale. Ogni insieme d'informazione, fattuale e controfattuale, avrà per elementi stati ai quali ancora saranno «appese» descrizioni di insiemi d'informazione, diciamo, fattuali-fattuali, contro-fattuali e contro-controfattuali; agli elementi di questi insiemi, a loro volta, saranno appese ulteriori descrizioni, e così via. Anche estendendo ad ogni caso opportune condizioni di coerenza che rendano ridondanti tutte le controfattualità, appare problematica l'iterazione stessa.

La formalizzazione che svilupperemo a questo scopo nel paragrafo successivo si svolge utilizzando strumenti di logica modale epistemica con cui da alcuni anni la letteratura¹² ha affrontato lo studio delle «proprietà epistemiche» degli stati del mondo in contesti di teoria delle decisioni e dei giochi.

Per limiti di spazio possiamo qui solo accennare a come in tale ambito i due oggetti componenti la struttura d'informazione siano sostituiti da un operatore «di conoscenza» K che agisce come una funzione da $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}$: scriveremo KE per l'immagine in $\mathcal{S}$ di $E \in \mathcal{S}$ secondo la K . L'evento KE sarà l'insieme degli stati del mondo alla cui eventuale realizzazione il decisore verrebbe a conoscere (le proprietà rappresentate da) l'evento E ¹³.

Lo studio assiomatico dell'operatore di conoscenza ha consentito, tra l'altro, di chiarire i rapporti insiemistici tra eventi epistemiche e tra questi e gli eventi di cui sono immagine, impliciti nelle postulazioni delle diverse strutture d'informazione. Tali strutture, infine, rendono ridondante la esplicitazione della funzione d'informazione come definita sopra, che viene sussunta nella relazione insiemistica d'appartenenza, senza che con questo di necessità sia surrettiziamente ipostizzata la veridicità degli insiemi d'informazione.

4. Conoscenze «ex ante» ed «ex post» in forma intensionale

Rilevando un'antinomia di cardinalità a preclusione della possibilità di una rappresentazione completa dell'incertezza soggettiva, abbia-

¹² Non avendo spazio per indicare qui una gamma di riferimenti minimalmente sufficiente, rinviando a Lismont, Mongin [1994].

¹³ L'operatore epistemico è generalmente indicizzato per distinguere le conoscenze di decisori diversi. Ciò nel prosieguo non ci sarà necessario.

mo soltanto dirozzato preliminarmente un'analitica della distinzione *ex ante-ex post*.

Abbiamo infatti piuttosto presunto, nel precedente paragrafo, una caratterizzazione dell'*ex ante* in requisiti di completezza che si rivelano irraggiungibili, che non afferrato alcuna sua determinazione positiva la cui rappresentazione formale ci prefiggiamo tuttavia di realizzare; abbiamo poi lasciato indifferenziata l'analisi degli oggetti che appaiono invece costruibili. Sarebbe peraltro assurdo ritenere irraggiungibile tutto ciò che sia *ex ante*, in particolare alcuna di quelle prefigurazioni che sono il contenuto delle aspettative; né resta, d'altra parte, ancora definita alcuna delineazione dell'orizzonte delle possibilità delle descrizioni, che pertengono invece all'ambito dell'*ex post*.

In questo paragrafo desideriamo presentare, seppure a grandi linee, le costruzioni matematiche ottenibili utilizzando due fondamentali procedure, con le quali intendiamo formalizzare i concetti di conoscenza iterata interna ed esterna, evidenziando in particolare la possibilità di discriminare intensionalmente eventi che restano estensionalmente uguali.

Le procedure consistono in una operazione di sostituzione di uguali e una di applicazione su uguali agli elementi della relazione binaria di uguaglianza tra insiemi nel caso di punto fisso dell'operatore modale di conoscenza.

Sia dunque $KE = E$ un punto fisso dell'operatore di conoscenza (o credenza) di qualche semantica algebrica di logica modale epistémica¹⁴. La lettura estensionale dell'equazione è che un certo fatto è vero a tutti e soli quegli stati ove accade che il fatto sia noto.

Consideriamo prima la sostituzione tra uguali. Dato il punto fisso, possiamo sostituire l'occorrenza di E nel membro di sinistra dell'uguaglianza con la stringa cui E è uguale, ossia l'intero membro di sinistra stesso. Tale operazione può inoltre essere iterata:

$$\begin{array}{c} K \boxed{E} \\ \downarrow \\ K \boxed{KE} \\ \downarrow \\ KK \boxed{KE} \\ \vdots \end{array}$$

¹⁴ In molte logiche epistémiche un punto fisso è garantito dall'ipostatizzazione di $KK = \Omega$, con cui si richiede che a ogni stato del mondo sia noto che uno e un solo

L'ottenuta sequenza infinita di stringhe finite elenca gli elementi cui congiunzione infinita definisce, nel contesto teorico cui ci riferiamo, una nozione formale di conoscenza iterata (c.i.)¹⁹. La sequenza, ottenuta per sostituzione, si sviluppa verso destra; ciò può essere messo in evidenza etichettando i simboli dell'operatore con numerali che segnino l'ordine della propria introduzione. Inoltre, la consueta assiomaticizzazione della relazione di uguaglianza garantisce che la sostituzione tra uguali preservi la relazione stessa, che quindi vale tra le stringhe della sequenza e tra queste e il punto fisso:

$$\begin{aligned} K_{(1)}E &= E \\ K_{(1)}K_{(2)}E &= E \\ K_{(1)}K_{(2)}K_{(3)}E &= E \\ &\vdots \end{aligned}$$

Chiameremo la nozione formale così definita c.i. analitica (c.i.a.).

Possiamo costruire una nozione alternativa di c.i. sulla stessa relazione di uguaglianza di punto fisso, $KE = E$, per applicazione iterata dell'operatore di conoscenza. Per le proprietà della relazione, l'applicazione di K ad ambo i membri dell'uguaglianza conserva l'uguaglianza stessa in modo ovvio:

$$\begin{aligned} KE &= E \\ KKE &= KE = E \\ KKKE &= KKE = KE = E \\ &\vdots \end{aligned}$$

Lo stato dell'universo sia lo stato effettivo. Più in generale, per mezzo di un altro, ugualmente comune, postulato di monotonicità dell'operatore $K: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ l'esistenza di un punto fisso è dimostrata dal teorema di Knaster-Tarski tramite argomentazioni insiemistiche sui cardinali ovvero sugli ordinali [si veda Knaster 1927].

¹⁹ Si potrà peraltro omettere un qualsiasi segmento iniziale (finito) della sequenza, purché il linguaggio garantisca una deduzione, abbastanza naturale, di stringhe più brevi da stringhe più lunghe, come nel caso di: se i sa che j sa x , allora j sa x . Per definire poi, sulla falsariga di questa sequenza, una «conoscenza comune» tra due individui i e j sarà necessario indicizzare l'operatore epistemico, considerare un punto fisso comune $K_i F = F$ e $K_j F = F$ con, presumibilmente, $E \subseteq F$, e sostituire in modo incrociato. Alternativamente, si legga subito K come $K_i K_j$. Peraltro tutto ciò mostra l'indipendenza delle nostre osservazioni dall'esistenza di una pluralità di decisori. Cfr. *supra* nota 10.

La sequenza infinita di stringhe finite ottenuta in tal modo si sviluppa verso sinistra; ciò può essere evidenziato, di nuovo, etichettando i simboli dell'operatore con numerali che segnino l'ordine della propria introduzione¹⁶:

$$\begin{aligned}K_{(1)}E &= E \\K_{(2)}K_{(1)}E &= E \\K_{(3)}K_{(2)}K_{(1)}E &= E\end{aligned}$$

Chiameremo questa seconda nozione c.i. costruttiva (c.i.c.).

Mentre le consuete nozioni formali di conoscenza iterata prendono in considerazione stringhe solo finite – seppure tutte tali stringhe finite – sarà matematicamente ovvio considerare il limite delle procedure di cui sopra e ottenere le seguenti stringhe transfinito numerabili:

$$\begin{aligned}K_{(1)}K_{(2)}K_{(3)} \dots E, \\ \dots K_{(3)}K_{(2)}K_{(1)}E.\end{aligned}$$

Queste potranno essere chiamate rispettivamente c.i.a. ω e c.i.c. ω ¹⁷. Una opportuna assiomatizzazione transfinita della relazione di uguaglianza consentirà di mantenere l'uguaglianza tra c.i.a. ω , c.i.c. ω e il punto fisso. Una relazione di identità sintattica sarà ora utile a questo punto per definire alcuni simboli:

$$\begin{aligned}K_{(\omega)}E &\equiv K_{(1)}K_{(2)}K_{(3)} \dots E, \\ {}_{(\omega)}KE &\equiv \dots K_{(3)}K_{(2)}K_{(1)}E.\end{aligned}$$

Dato che $K_{(\omega)}E = E$ e ${}_{(\omega)}KE = E$, allora $K_{(\omega)}E = {}_{(\omega)}KE$.

¹⁶ Per chiarire, i K numerati non sono in alcun modo da considerarsi distinti; la numerazione ha il solo scopo di fungere da memoria della procedura seguita. Di fatto, la diversa direzione della numerazione non ha alcuna rilevanza *per stringhe finite*.

¹⁷ La deduzione di stringhe finite da infinite dovrà essere opportunamente regolata nell'ambito di un adeguato linguaggio infinitario consentendo la deduzione di segmenti iniziali di stringhe transfinito dalle stringhe transfinito stesse. È caratteristico delle c.i.a. ω e c.i.c. ω di «contenere» l'intera infinita sequenza di stringhe finite di c.i.a., rispettivamente c.i.c., discusse in precedenza.

Ulteriori sviluppi transfiniti delle due procedure potrebbero, come è ovvio, essere elaborati. Tuttavia, anche solo i primi limiti che abbiamo considerato sono sufficienti, come vedremo, a discriminare tra le due nozioni estensionalmente uguali.

La prefigurazione da parte dei giocatori di un esito del gioco sarà completa solo se il loro bagaglio di conoscenze sarà, come diremo, epistemicamente autocontenuto, ossia se prevederà la conoscenza delle stesse conoscenze; tale conoscenza è precisamente quella che il teorico del gioco possiede quando impone una qualche conoscenza comune ai giocatori. Se è necessario che i giocatori abbiano tale conoscenza comune, allora dovranno saperlo; altrimenti, con il teorico, non potranno essere certi dell'esito del gioco.

Fintanto che la c.i. è definita tramite stringhe finite di conoscenza, c.i. e conoscenza della c.i. coincidono, ossia sono estensionalmente uguali e intensionalmente identiche. La conoscenza della c.i. è infatti ottenuta applicando un operatore di conoscenza a ciascuna stringa finita in ambo le sequenze:

$$\begin{array}{ll} KK_{(1)}E = E & KK_{(1)}E = E \\ KK_{(1)}K_{(2)}E = E & KK_{(2)}K_{(1)}E = E \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Le sequenze così ottenute potranno rigenerare le originali c.i.a. e c.i.c. con semplice deduzione dei termini primi mancanti; ciascuna stringa finita potrà essere identificata con il successore della stringa a cui K è applicato.

Non sarà più così nei due casi delle stringhe limite. Nel primo abbiamo,

$$KK_{(1)}K_{(2)}K_{(3)} \dots E \equiv K K_{(\omega)}E \equiv K_{(\omega)}E,^{18}$$

identica a c.i.a. ω : la sequenza ben ordinata di K in $K_{(\omega)}E$ è l'ordinale ω , così come la sequenza ben ordinata di K in $KK_{(\omega)}E$.

Nel secondo abbiamo,

$$K \dots K_{(3)}K_{(2)}K_{(1)}E \equiv K_{(\omega)}KE \neq_{(\omega)}KE,$$

¹⁸ Commettiamo un abuso di notazione quando non distinguiamo il segno di identità sintattica dal segno di uguaglianza dell'aritmetica ordinale, ossia la prima dalla seconda occorrenza di $\equiv$ in questa equazione.

ove la sequenza ben ordinata di K in $K_{(\omega)}$ KE è l'ordinale $\omega + 1$, successore dell'ordinale ω , che è invece isomorfo alla sequenza ben ordinata di K in ${}_{(\omega)}KE$ [si veda, ad esempio, Sierpinski 1965].

D'altra parte, l'uguaglianza insiemistica continua a valere:

$$KK_{(\omega)}E = K_{(\omega)}E = E, \text{ e } K_{(\omega)}KE = {}_{(\omega)}KE = E;$$

da cui,

$$K_{(\omega)}KE = KK_{(\omega)}E.$$

Pur conservando l'uguaglianza ovunque, la c.i.a. ω non è intensionalmente identificabile con la c.i.c. ω .

Una parola di commento. Gli oggetti di conoscenza iterata transfiniti possono suscitare perplessità di vario tipo. In generale, a stringhe transfinte non corrisponderà immediatamente alcuna parola dei linguaggi naturali che ci sono consueti; peraltro, questa obiezione pertiene tanto alle congiunzioni infinite di stringhe finite quanto ai nostri termini transfiniti, e le prime sono oggi normalmente impiegate in formalizzazioni della conoscenza comune¹⁹, che, quale che sia il senso che le si voglia dare, ha certamente natura infinitaria.

Più in particolare, potrà risultare difficile dare un'interpretazione della c.i.a. ω come di un elemento di conoscenza quando il suo oggetto «di base» E non cade nell'ambito di alcun operatore « i sa che...»; d'altra parte, con la nostra c.i.c. ω proponiamo la formalizzazione di un elemento di conoscenza che non potrà, all'apparenza, nemmeno essere enunciato, per mancanza di un cominciamento dell'enunciazione.

Possiamo però considerare le procedure di sostituzione e applicazione iterate, che abbiamo seguito, come metafore di simili procedure che il decisore in attitudine epistemica può seguire. Allora, lo status delle stringhe limite potrà essere quello di rappresentanti delle operazioni stesse in sé – e magari dell'infinità potenziale dei loro risultati – piuttosto che di qualsivoglia istanza (finita) di risultato. Sviluppando questo modo di vedere, il decisore nel corso di iterare l'operazione di sostituzione (o di applicazione) potrà ben rendersi conto di ciò che fa, per così dire, e considerare quindi la procedura seguita in sé; egli

¹⁹ Si veda tuttavia Lismont, Mongin [1994] per formalizzazioni finitarie del concetto di conoscenza comune.

giungerà con ciò al possesso di una conoscenza della stringa infinita – che sarà adesso, se vogliamo, attualmente infinita – la cui lunghezza, tuttavia, non potrà avere, per così dire, esaurito.

Questa interpretazione peraltro corrisponde alla corretta filosofia del passaggio al limite di ogni operazione, che lo considera una sorta di «meta-operazione» il cui potenziale è l'insieme delle possibili istanze di risultato dell'operazione stessa, anziché immaginare contraddittoriamente di collocarsi al «termine» della sequenza infinita delle singole istanze.

5. Conclusioni

I concetti di conoscenza iterata e quindi di conoscenza comune che fanno parte del bagaglio linguistico di teoria delle decisioni ed economico, subiscono, ci pare, un mutamento alla luce delle elaborazioni svolte.

Abbiamo perseguito un approccio operativo, anziché assiomatico, alla rappresentazione della conoscenza iterata. Se con questo siamo riusciti a rappresentare le nozioni di conoscenza comune «interna» e «esterna» descritte nell'introduzione, dipende dall'interpretazione delle due operazioni di sostituzione e applicazione.

L'operazione di applicazione, concettualmente più elementare, ci pare più adatta a rappresentare la distanza tra conoscitore e oggetto di conoscenza: riteniamo che non sia possibile colmare questo iato iterando l'operazione, come risulta dalla differenza, ad esempio, tra c.i.c. ω e conoscenza di essa. L'operazione di sostituzione potrà invece rappresentare, come abbiamo proposto, la capacità del conoscitore di sviluppare analiticamente proprietà interne dell'oggetto osservato, tra cui quella di essere noto.

Ci pare inoltre di aver chiarito come la possibilità dell'iterazione conoscitiva non abbia limiti, in un senso ben più ampio della semplice infinità numerabile. Evidentemente, l'intera scala degli ordinali potrà essere percorsa nel tentativo, ad esempio, di costruire una nozione di c.i.c. che sia epistemicamente autocontenuta: porsi allora la questione di una conoscenza formale di *questa* significherà essenzialmente incorrere nell'antinomia di Burial-Forti. In generale, la stessa nozione di conoscenza comune rischia, ci pare, di risultare indefinibile.

La teoria delle decisioni neo-bayesiana si affida a un approccio estensionale della conoscenza: le diverse nozioni di conoscenza *ex post* e *ex ante* che abbiamo elaborato sono estensionalmente non discriminabili, e segnano quindi una incapacità di tale teoria di darne conto.

La tradizionale filosofia soggettivistica della probabilità – che distinguiamo dal progetto di Aumann [cfr. anche Binmore 1993] – rifugge dalla tentazione di soddisfare richieste di «giustificazione» delle credenze postulate, ritagliandosi così una funzione strettamente descrittiva. La sua natura estensionale rende, riteniamo, la questione di quali proprietà strutturali degli stati possano «fondare» le credenze non di sua pertinenza.

Riferimenti bibliografici

- Aumann, R. (1976), *Agreeing to Disagree*, in «Annals of Statistics», vol. 4, pp. 1236-1238.
- (1987a), *Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality*, in «Econometrica», vol. 55, pp. 1-18.
- (1987b), *Game Theory*, in Eatwell-Milgate-Newman (a cura di), *The New Palgrave*, vol. 2, London, Macmillan, pp. 460-482.
- (1992), *Notes on Interactive Epistemology*, dattiloscritto.
- Binmore, K. (1993) *De-Bayesing Game Theory*, in Binmore-Kirman-Tani (a cura di), *Frontiers of Game Theory*, Cambridge, Mass., MIT Press, pp. 321-339.
- Knaster, B. (1927), *Un théorème sur les fonctions d'ensembles*, in Givant-McKenzie (a cura di), *Alfred Tarski. Collected Papers*, Basel, Birkhäuser, 1986, vol. 4, pp. 546-547.
- Lismont, L., Mongin, P. (1994), *On the Logic of Common Belief and Common Knowledge*, in «Theory and Decision», vol. 37, pp. 75-106.
- Sierpinski, W. (1965), *Cardinal and Ordinal Numbers*, Varsavia, Polish Scientific Publishers, seconda edizione.