

ALDO MONTESANO

PER UNA TEORIA GENERALE EMPIRICA DELLA PRODUZIONE

SOMMARIO: Introduzione. — I. *Il sostrato della teoria empirica della produzione*: 1. Il principio di operatività. — 2. Il principio di esaustività. — 3. Il principio di semplicità. — 4. L'indeterminazione logica, dinamica, statica e lo schema teorico. — 5. La natura della teoria generale empirica della produzione. — II. *Caratteristiche del sistema della produzione*: 1. I possibili sistemi della produzione. — 2. Il numero delle variabili esogene. — 3. Sistemi di equazioni algebriche e funzionali, lineari e non lineari. — III. *Il sistema produttivo e l'aggregazione*: 1. Il numero delle variabili endogene e l'aggregazione. — 2. Dalle microvariabili alle macrovariabili. Una prima via: le variabili endogene come grandezze fisiche. — 3. Dalle microvariabili alle macrovariabili. Una seconda via: le variabili endogene come numeri indice. — 4. Valutazione dell'indeterminazione delle macrovariabili. — 5. L'aggregazione e la scelta delle macrovariabili. — 6. Dalle microequazioni alle macroequazioni. Dai microparametri ai macroparametri. L'aggregazione nei sistemi algebrici lineari. — 7. Il medesimo problema con il calcolo delle matrici. — 8. L'indeterminazione dei macroparametri. — 9. L'aggregazione nei sistemi lineari a differenze finite e differenziali. — 10. L'aggregazione e le « industrie ». Definizione operativa di « industria ».

Introduzione. Oggetto della teoria generale empirica (empirica perchè studia la realtà osservabile) della produzione è un sistema di relazioni che risulti soddisfatto dai valori, manifestantisi nel tempo, delle grandezze economiche. Le relazioni legano le grandezze economiche (o endogene) fra loro e con grandezze extraeconomiche (o esogene); perchè il sistema sia completo occorre che vi siano tante relazioni indipendenti e compatibili fra loro quante variabili endogene indipendenti. Nel sistema della produzione le grandezze endogene sono quantità prodotte e loro prezzi, quantità dei fattori di produzione e loro remunerazioni, o anche grandezze derivate da queste. Le relazioni sono quantitative perchè quantitative sono le grandezze endogene produttive e quantitativo, quindi, deve essere lo strumento da cui si possano ricavare; ciò però non implica che tutta la realtà sia quantitativa, il tessuto qualitativo può trasparire nelle variabili esogene.

Una siffatta teoria generale della produzione pone numerosi interrogativi non solo metodologici, cioè sul modo di procedere nella costruzione scientifica, ma anche e soprattutto, peraltro collegati ai primi, logici, cioè sulla natura della scienza economica e delle sue relazioni, che richiedono un'analisi preliminare dei caratteri fondamentali suoi propri e del comune sapere scientifico.

La presente comunicazione si svolge nell'ambito di questi problemi, non concerne pertanto la ricerca delle relazioni fra le variabili economiche, ma si occupa di taluni aspetti della loro interrelazione, delle conseguenze delle indeterminazioni logica, dinamica e statica e delle limitazioni che sorgono dalla operativamente necessaria aggregazione. Dopo un rapido esame della costruzione teorica in rapporto ai principi di operatività, di esautività e di semplicità, si considerano le tre forme di indeterminazione e la natura della teoria che ne deriva; successivamente, indicate le fasi della ricerca del sistema produttivo, si osservano le sue caratteristiche formali e i vincoli a cui è soggetto il numero delle variabili esogene; un ultimo più ampio esame riguarda i riflessi delle distorsioni dovute alla aggregazione sulla scelta delle « industrie », di cui verrà dato il criterio operativo di determinazione.

I.

IL SOSTRATO DELLA TEORIA EMPIRICA DELLA PRODUZIONE

1. *Il principio di operatività.* Il principio di operatività (1) afferma, sul fondamento che le teorie empiriche hanno come necessario riferimento l'osservazione della realtà, che i concetti e le variabili da esse utilizzati devono aderire strettamente alla realtà osservabile.

Infatti, le variabili e i concetti possono essere definiti o indicando le loro proprietà, prescindendo quindi dalla loro effettiva presenza nella realtà osservabile, e allora si hanno scienze formali

(1) Come ogni principio anche quello di operatività è, benchè inespreso, presente, anche se non completamente soddisfatto, in tutte le ricerche. La sua individuazione e la coscienza che esso è di fondamentale importanza nelle scienze, particolarmente quelle fisiche, concezione che va sotto il nome di « operazionismo », sono discusse in numerose opere di diversi autori; fra queste P. W. BRIDGMAN, *The logic of modern physics*, New York, 1927. Per quanto concerne gli studi economici l'operatività è oggetto di costante richiamo in G. DEMARIA, *Trattato di logica economica*, Vol. II, Padova, 1966.

(assiomatiche) come le matematiche, o in diretto riferimento alla loro ricognizione, ricognizione (o cognizione) che è *costituita da quel complesso di operazioni con cui i fatti della realtà (detti anche quantità, oggetti, fenomeni, eventi) vengono opportunamente descritti e classificati* (2).

Desiderandosi costruire una teoria empirica le variabili devono essere operative, cioè la loro definizione consiste nel complesso di operazioni che permettono di misurarle. Così, ad esempio, la variabile quantità di produzione è definita dalle operazioni statistiche che si compiono per rilevarla, cioè le misure fisiche (numeri di unità, o pesi, o volumi, ecc.) dei prodotti, così il prezzo è definito non altrimenti che dal rapporto fra le quantità dei beni scambiati, così poi non è operativa la concezione paretiana per cui oggetto della economia politica è lo studio delle *azioni logiche... che fanno gli uomini per procacciarsi le cose che soddisfano ai gusti loro* (3) (l'osservazione infatti rileva valori che sono determinati anche da azioni non logiche, senza che sia possibile separare, seppure ciò ha senso, quanto è dovuto alle azioni logiche e quanto alle non logiche; la teoria delle azioni logiche non ha quindi la possibilità di un confronto con la realtà) (4).

Le variabili operative poi possono essere suddivise in variabili operative metriche e non metriche a seconda che siano misurabili con una scala cardinale o non cardinale (5); le variabili endogene del sistema produttivo, già indicate, sono, quindi, metriche.

(2) G. DEMARIA, *Trattato di logica economica*, Vol. I, Padova, 1962, p. 4.

(3) V. PARETO, *Manuale di Economia Politica*, Roma, 1965, pp. 94-95.

(4) Quando poi si pensa di determinare le curve di indifferenza empiricamente, con la *preferenza rivelata* (G. B. ANTONELLI, *Sulla teoria matematica della economia politica*, Pisa, 1886; P. A. SAMUELSON, *Consumption Theory in Terms of Revealed Preference*, « *Economica* », 1948), allora non si considera più il comportamento logico escludendo il non logico, ma il comportamento *tout court*, quello empirico. Si cade così, però, in un ragionamento tautologico; infatti le curve di indifferenza vengono determinate dal comportamento del soggetto e questo da quelle; qualsiasi comportamento è giustificato da una tale teoria.

(5) Sono variabili metriche, seguendo la distinzione per i diversi tipi di scale di misura compiuta da S. S. STEVENS, *Measurement, psychophysics and utility*, in C. W. CHURCHMAN e P. RATOOSH, *Measurement. Definitions and theories*, New York-London, 1959 (questo esame si trova anche in molti altri lavori di S. S. STEVENS), quelle la cui scala di misura è del tipo rapporto (*ratio*) o intervallo (*interval*), non metriche quelle del tipo ordinale o nominale. Le operazioni di misura con scala rapporto consistono nell'eguagliare rapporti (rapporti rispetto alla misura unitaria) e il gruppo di trasformazione è omotetico ($x' = cx$, con $c > 0$), cioè cambiando riferimento (unità di misura) le misure dei diversi fatti variano come in una similitudine, mantenendo inva-

2. *Il principio di esaustività.* Un principio che non dovrebbe neppure essere enunciato perchè immediatamente ovvio, ma che spesso non è soddisfatto nelle ricerche economiche empiriche, è quello che può esser detto di esaustività; per esso le grandezze che intervengono nelle relazioni del sistema sono tutte quelle che concorrono a formare la realtà economica, non è possibile cioè, in un sistema teorico empirico, considerare solo alcune grandezze fra quelle presenti nella realtà osservata e influenti sulle grandezze economiche.

Ad esempio, nell'esame della produzione nei termini aggregatissimi della funzione di Wicksell-Cobb-Douglas (6), prescindendo dalla inadeguatezza di tale funzione a rappresentare il processo produttivo, la considerazione che i suoi mutamenti nel tempo, i cui valori sono desunti da calcolazioni statistiche, siano in relazione esclusiva col solo fattore tecnologico, è manchevole, perchè tali mutamenti dipendono anche da altri fattori (demografici, psicologici, ecc.) e da fatti entelechiani (guerre, ecc.), influenzando anche questi significativamente sulle grandezze produttive e non sempre e soltanto attraverso la mediazione del fattore tecnologico.

In una teoria generale empirica della produzione devono perciò esser presenti, insieme, tutte le grandezze endogene e tutte le grandezze esogene influenti (7).

riati i loro mutui rapporti ($x_2/x_1 = x'_2/x'_1$); le operazioni di misura con scala intervallo consistono nell'eguagliare intervalli (l'unità di misura è in tal caso un intervallo, lo zero della scala è arbitrario) e il gruppo di trasformazione è affine ($x' = ax + b$, con $a > 0$), cioè cambiando riferimento (unità di misura e zero della scala) le misure dei diversi fatti variano come in una affinità, mantenendo invariati i rapporti semplici ($\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{x'_2 - x'_1}{x'_3 - x'_1}$); le operazioni di misura con scala ordinale permettono di determinare il più o meno grande e il gruppo di trasformazione è isotonico ($x' = f(x)$, con $\frac{df(x)}{dx} > 0$), cioè cambiando riferimento (la numerazione della scala) le misure dei diversi fatti mantengono invariato il loro ordine (se è $x_2 > x_1$ è anche $x'_2 > x'_1$, cioè $\frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1} > 0$); le operazioni di misura con scala nominale permettono di determinare solo l'eguaglianza o la non eguaglianza, la misura non è più quantitativa, è solo una etichetta.

(6) R. M. SOLOW, *Technical change and the aggregate production function*, *Review of economics and statistics*, 1957. La funzione di Wicksell-Cobb-Douglas considerata è del tipo $Q = A(t) L^{w_L(t)} K^{w_K(t)}$. Le variazioni nel tempo di $A(t)$ e $w_K(t)$ (è poi $w_L(t) = 1 - w_K(t)$) sono associate al progresso tecnico (*technical change*); inoltre questo è definito neutrale se w_K è costante nel tempo.

(7) Le grandezze esogene sono suddivise in propagatori e in entelechiani. I primi, relativi ai fatti sociali e naturali da cui sono condizionati gli eventi

L'esaustività non significa però che deve essere creata e immessa nel sistema una congerie immane di variabili, implica soltanto la considerazione di tutte le variabili importanti e influenti nell'ordine di approssimazione della teoria; se è vero che una migliore approssimazione richiede, in genere, un numero maggiore di variabili, è anche vero che al crescere di questo diminuisce, fino a cessare, la possibilità di un confronto con la realtà osservabile, risulta cioè sempre più difficoltosa, fino a venire meno, la operatività. Vi è quindi d'un lato il desiderio di una maggiore completezza e precisione, vi sono dall'altro le necessità pratiche operative; occorre un temperamento, contemperamento e compromessi, peraltro, che caratterizzano il mondo reale e che sono invece banditi solo nel platonico e astratto mondo delle idee.

3. *Il principio di semplicità.* Un altro principio a cui è bene accennare è quello di semplicità (8); è di esso la tendenza a ricercare leggi semplici e il criterio che porta, fra due teorie egualmente atte a rappresentare la realtà, a preferire la più semplice. Questo principio permea tutta la ricerca scientifica e può essere collegato, quando non sia un *a priori* come per Cartesio, alla convinzione che, per la descrizione della realtà, non esista la teoria assolutamente vera, ma si debba, fra le concorrenti, accettare la migliore, migliore perchè atta a descrivere un ordine più vasto di fenomeni, perchè confortata da una più precisa aderenza alle rilevazioni empiriche, perchè più semplice.

economici, sono classificati in demografici, psicologici, tecnologici, di distribuzione dei redditi e delle fortune, di distribuzione delle specie di imprese, del grado di inserimento nell'economia internazionale, istituzionali, sindacali, monetari-bancari-finanziari; i secondi sono i fenomeni imprevedibili nella loro manifestazione, come guerre, rivoluzioni, carestie, terremoti, repentini mutamenti di gusti e di politiche, la cui decisiva influenza sulle variabili economiche trova conferma nelle ricerche empiriche di G. DEMARIA *et al.*, *Ricerche di cinematica storica*, Padova, 1968.

(8) Non è compito di questo rapido esame un'analisi approfondita di tale principio e del concetto stesso di semplicità, così come, d'altronde, non lo è stato per l'operatività e l'esaustività; unico obiettivo è quello di mostrare, a grandi linee, come esso sia da intendersi e quale sia il suo ruolo nella ricerca scientifica economica.

Un'analisi che si dispiega sul concetto di semplicità è in M. BUNGE, *The Myth of Simplicity*, Englewood Cliffs, N. J., 1963, p. 51 ss., ove si distingue fra semplicità ontologica (o delle cose) e semplicità semiotica (o dei segni), quest'ultima distinta a sua volta in semplicità sintattica (o logica o economia di forme), semantica (o economia di postulati), epistemologica (o economia di concetti trascendenti) e pragmatica (o economia di lavoro); Bunge respinge la semplicità come attributo del vero, lo scolastico *simplex sigillum veri*, mostrando la migliore conoscenza come maggiore complessità.

Tale principio non deve significare che la forma della relazioni debba per forza esser semplice, ciò sarebbe aprioristico e contrario al carattere empirico, ma soltanto che, prima di saggiare la realtà con le relazioni più complesse, sia bene provare con le più semplici; si può ripetere con Poincaré (9): *Aujourd'hui les idées ont bien changé* (cioè non si crede più che le leggi naturali debbano essere semplici); *et cependant ceux qui ne croient pas que les lois naturelles doivent être simples, sont encore obligés souvent de faire comme s'ils le croyaient. Ils ne pourraient se soustraire entièrement à cette nécessité sans rendre impossible toute généralisation et par conséquent toute science.*

4. *L'indeterminazione logica, dinamica e statica e lo schema teorico.* Come ogni scienza empirica così anche l'economia non gode di quella assoluta precisione, di quella assenza di approssimazione, che è propria delle scienze formali. Essendo basata sull'osservazione del reale, partecipa dell'imprecisione di questa, ha fondamento solo nel campo che si è osservato, è limitata dalle originalità che storicamente si manifestano. Tutte le imperfezioni, imperfezioni rispetto alla cristallinità delle scienze formali, sono compendiate e distinte nei concetti di indeterminazione logica, dinamica e statica (10). È quindi opportuno considerare le conseguenze che dalle tre forme di indeterminazione discendono sulla costruzione teorica.

L'indeterminazione logica si manifesta come inesattezza, impossibilità cioè di osservazioni esatte della realtà, e come incertezza, impossibilità cioè di osservazioni complete della realtà (essendo i fatti in numero necessariamente superiore alle osservazioni deriva che l'induzione generalizzante può non essere in perfetto accordo con quelli non osservati). La sua influenza, cioè il livello di errore che ne deriva, può essere limitata e la sua presenza quindi, se coinvolge la precisione dei risultati, non impedisce tuttavia un'utile ricerca. Questa può compiersi utilizzando strumenti probabilistici o accontentandosi comunque di un certo livello di approssimazione.

L'indeterminazione dinamica è connessa all'esistenza dei fatti originali, di quei fatti cioè che non è possibile spiegare compiuta-

(9) H. POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*, Paris, 1902, p. 173.

(10) L'analisi delle tre forme di indeterminazione è in G. DEMARIA, *Trattato I, op. cit.*, pp. 47-54 e altrove.

mente con la conoscenza del passato e del presente. Questi fatti, detti entelechiani, comprendono sia gli eventi assolutamente imprevedibili, dovuti alla libertà connaturata all'uomo, sia quegli eventi, in genere naturali, non imprevedibili in sè ma tali per difetto di conoscenze. Questo tipo di indeterminazione è certamente presente nello svolgersi dei fenomeni produttivi e gli schemi teorici per lo studio della produzione devono tenerne conto. Si potrebbe pensare che ciò possa avvenire considerando variabili economiche probabilistiche, e quindi valori medi, ecc. Ciò però non è ragionevole nè conforme ad una seria concezione scientifica (non è noto il tipo di distribuzione statistica, nè ha alcun fondamento empirico una ipotesi di gaussianità); quand'anche poi si ritenesse corretto in questo caso l'uso di variabili casuali, basterebbe considerare che l'analisi storica (11) mostra la presenza di frequenti e importanti entelechiani per rilevare come la previsione delle grandezze economiche da relazioni probabilistiche risulterebbe del tutto vaga (si pensi, ad esempio, a variabili con varianza molto elevata). Lo schema teorico non può quindi essere nè deterministico nè deterministico-probabilistico, in esso occorre introdurre delle variabili che rappresentano col loro valore le influenze degli entelechiani.

L'indeterminazione statica discende dalla inadeguatezza di uno schema ad affrontare il problema proposto; questo tipo di indeterminazione si riduce se si adotta uno schema migliore che tiene conto di tutto ciò che effettivamente influisce sulla realtà considerata nel problema. Vi è certo un legame fra il principio di esaustività e l'indeterminazione statica nel senso che perchè non vi sia indeterminazione statica è necessario che sia soddisfatto il principio di esaustività; questo però non è sufficiente, occorre anche, oltre alla presenza di tutte le variabili agenti, che lo schema che le compone sia adeguato. In economia l'indeterminazione deriva spesso dal fatto che il mondo economico è influenzato anche da fatti non economici; quindi, perchè essa sia ridotta, occorre considerare negli schemi teorici tutte le variabili esogene agenti.

5. *La natura della teoria generale empirica della produzione.*

Per le considerazioni finora svolte la ricerca di una teoria generale

(11) Si vedano le ricerche di cinematica storica pubblicate dal 1963 in poi sul « *Giornale degli Economisti e Annali di Economia* » e raccolte nei volumi G. DEMARIA *et al.*, *Ricerche di cinematica storica*, *op. cit.*

della produzione deve essere condotta, poichè essa è empirica, seguendo criteri operativi e esaustivi, e, per necessità pratiche, su basi di semplicità (ma non di semplicismo).

Ciò però che illumina la natura della ricerca economica nei caratteri che più la distinguono dalle altre scienze, sono le conseguenze che derivano dall'indeterminazione: impossibilità di una teoria deterministica, ossia di previsioni del futuro dalla conoscenza del presente e del passato; presenza di un insieme esaustivo di variabili esogene; naturale approssimazione della teoria, soggetta a modificarsi per il sorgere di situazioni e fatti nuovi; ecc.

Se la natura indeterministica e esogenistica (12) (un meccanico razionale direbbe che il sistema delle grandezze economiche non è isolato ma soggetto a forze ad esso esterne la cui legge di accadimento gli è ignota) che la teoria perciò assume, riflette il limite alla predeterminabilità dei fatti umani, anche se economici, ed è illuminata dal principio della fondamentale libertà dell'uomo insieme che della interdipendenza di tutte le sue azioni (onde l'aspetto economico non è separato, non è indipendente, da quello non economico), ne è intatto il carattere pragmatico naturalmente presente in ogni scienza empirica. Infatti, la dipendenza delle variabili endogene da quelle esogene, che pur sempre indicano, per lo più, un comportamento umano, individuale o interindividuale che sia, mostra a quale atteggiarsi della società conseguano determinati effetti economici e, quindi, come debbano mutarsi i suoi caratteri (e se ciò sia possibile in un unico o più modi o sia impossibile) perchè conseguano certe configurazioni economiche, in assenza, o anche in presenza, di quei fatti abnormi, ma pur così frequentemente presenti nella storia, che determinano significativi mutamenti nella vita sociale, anche quindi economica, senza che ne sia predeterminabile l'avvento.

Si è così indicata la natura fondamentale della teoria generale della produzione, che è un sistema di relazioni fra grandezze economiche e extraeconomiche determinato nelle grandezze economiche. Si ha, cioè, che le grandezze economiche dipendono da quelle extraeconomiche, alle variazioni di queste accompagnan-

(12) Se, per un istante, si immagina la dinamica economica come successione di stati di equilibrio, non è il moto nel mutamento delle funzioni utilitarie e delle funzioni tecniche di produzione da cui le grandezze economiche unicamente dipendono? e da quali fattori discende il mutamento delle funzioni utilitarie e di produzione se non da fattori extraeconomici?

dosi una modificazione di quelle. Il sistema, quindi, dice quale configurazione produttiva è associata ad una certa situazione extraeconomica (sistematicamente osservabile come propagatori e entelechiani), quali conseguenze derivano da una variazione di questa e come sia possibile, se è possibile, modificando la situazione extraeconomica, conseguire una desiderata configurazione produttiva.

II.

CARATTERISTICHE DEL SISTEMA DELLA PRODUZIONE

1. *I possibili sistemi della produzione.* Avendo ammesso che il sistema della produzione sia quantitativo, esso rientra nel generale sistema di equazioni

$$f_i [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), e_1(t), e_2(t), \dots, e_m(t)] = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

ove $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ sono le variabili endogene e $e_1(t), e_2(t), \dots, e_m(t)$ quelle esogene; f_i indica una relazione algebrica (13), nel qual caso le variabili endogene sono considerate nei loro valori contemporanei, o una relazione funzionale, nel qual caso le variabili endogene ed esogene sono considerate come funzioni nel tempo, funzioni continue o discrete secondo che le relazioni funzionali siano del tipo differenziale (14) o a differenze finite.

Per procedere nella ricerca del sistema occorre determinare i criteri di valutazione dei fatti esogeni e individuare la relazioni del sistema; questi due problemi però sono interdipendenti, cioè mutando i criteri di valutazione dei fatti esogeni possono variare le relazioni del sistema, e viceversa.

(13) Le equazioni algebriche sono quelle ottenute eguagliando a zero un polinomio. Equazione significa, in matematica, eguaglianza di condizione. Nelle equazioni algebriche la condizione è imposta a numeri, in quelle funzionali (cioè differenziali, a differenze finite, ecc.) essa è imposta a funzioni. Orbene, ciò che vien detto per le equazioni algebriche, deve intendersi esteso a tutte le equazioni che impongono condizioni a numeri, tali cioè che sono ottenute eguagliando a zero una generica funzione, non solo quindi funzioni polinomiali, ma anche trascendenti. D'altra parte, queste, se sono sviluppabili in serie di TAYLOR (convergenndo in un campo di definizione adeguato), sono assimilabili a polinomi.

(14) Nel seguito col termine *differenziale* vengono indicate tutte le relazioni che involgono funzioni continue nel tempo, come sono anche quelle integrali e quelle integro-differenziali; talvolta il discorso riferito alle equazioni non strettamente differenziali richiederebbe qualche delucidazione o adattamento che però, per brevità, non sono dati.

Si può pensare a due vie principali per la ricerca dei sistemi produttivi. Con la prima, una volta individuati i fatti esogeni che si ritiene che abbiano influenza apprezzabile sulle variabili endogene, si associano ad essi dei valori numerici seguendo dei criteri *ab extra*, successivamente si cercano le relazioni che legano fra loro le variabili endogene e le esogene così ricavate, procedendo per tentativi e approssimazioni.

Seguendo la seconda via si scelgono intuitivamente e convenientemente le relazioni fra variabili endogene e esogene e dall'esame di periodi noti o *ab extra* si ricavano i valori delle variabili esogene che devono essere associate ai fatti extraeconomici propri dei periodi produttivi osservati; da questo accostamento si cerca di individuare i criteri con cui passare dai fatti extraeconomici ai valori da porre, per essi, nel sistema.

La seconda via presenta la difficoltà che con essa si ottengono delle serie di valori da associare a fatti extraeconomici dei periodi osservati. Tale problema, però, può essere risolto in generale solo ponendo i valori esogeni ricavati come funzioni dei fatti extraeconomici da cui si ritiene che dipendano; si ripresenta quindi, sotto una forma appena diversa, il problema iniziale, solo che ora al posto delle variabili endogene si hanno i valori ricavati per le variabili esogene. A tale problema si può, sebbene non con assoluta perfezione, far fronte limitandosi a rilevare delle tendenze fra le variazioni dei fatti extraeconomici qualitativamente osservati e le variazioni delle variabili esogene del sistema. Così non si ha certo una struttura determinata per l'esame delle influenze di specifici fatti, ma si è pur sempre istituito un criterio per giudicare sinteticamente le influenze dei fatti extraeconomici ed inoltre non occorre procedere alla loro quantificazione, quantificazione che è il punto dolente della prima via indicata.

Schematizzando il procedimento logico per giungere alla determinazione dei sistemi produttivi seguendo le due diverse vie, si ha che:

- I) seguendo la prima via, la ricerca può essere distinta nelle fasi:
 - a) individuazione dei fatti extraeconomici influenti sulle variabili economiche,
 - b) valutazione di essi mediante la scelta *ab extra* dei criteri di quantificazione,
 - c) ricerca delle relazioni del sistema con tentativi e successive approssimazioni;

II) seguendo la seconda via (15), la ricerca può essere distinta nelle fasi:

- a) conveniente scelta delle relazioni del sistema,
- b) esame dei periodi produttivi noti e calcolo dei rispettivi valori delle variabili esogene,
- c) ricerca di relazioni tendenziali fra i valori esogeni così desunti e i fatti extraeconomici osservabili.

2. *Il numero delle variabili esogene.* Alcune utili considerazioni concernono il numero delle variabili esogene presenti nel sistema. Si può stabilire, infatti, che le variabili esogene non possono essere inferiori in numero alle variabili endogene, se queste sono fra loro indipendenti, sono tali cioè che non è possibile costruire nessuna relazione che leghi soltanto variabili endogene.

A tale conclusione si può giungere col seguente ragionamento. La configurazione esogena consiste in m variabili, quella endogena in n . Sia ora, per assurdo, $m < n$. La configurazione endogena è determinata una volta che lo sia quella esogena, ma questa ha m gradi di libertà e non può determinare quella endogena che ne ha $n > m$. Se ciò accade significa che gli n gradi di libertà endogeni sono soltanto apparenti e che in realtà essi sono solo m ; è cioè possibile trovare $n-m$ relazioni che legano fra loro soltanto variabili endogene.

Si deduce quindi che il numero delle variabili esogene da introdurre nel sistema non può essere inferiore a quello delle variabili endogene se non è nota alcuna relazione che leghi fra loro soltanto variabili endogene e che, se il sistema produttivo è descrivibile con un numero di variabili esogene inferiore a quello delle variabili endogene, allora esistono relazioni fra sole variabili endogene, che risultano perciò non più indipendenti fra loro.

Ancora sul numero delle variabili esogene vi è da dire che, se esse superano, in numero, quelle endogene, se è cioè $m > n$, vi sono $m-n$ variabili esogene non strettamente necessarie, nel senso che n variabili esogene (purchè indipendenti fra loro) sono sufficienti a determinare ogni configurazione endogena ed è quindi possibile, mediante aggregazione (intesa questa nel senso più ge-

(15) Il sistema generale assoluto della produzione di G. DEMARIA, *Trattato II, op. cit.*, p. 1289 ss., è configurabile in questo secondo tipo di procedimento. Seguono questa via anche alcune ricerche di carattere econometrico condotte, e non ancora pubblicate, da D. CANTARELLI,

nerale), trovare n variabili esogene da cui far dipendere le variabili endogene. Ciò non toglie però che possa essere conveniente considerare un numero di variabili esogene maggiore di quello delle variabili endogene e che si possano, od anche si debbano, costruire sistemi con $m > n$.

Orbene, con la prima delle due vie indicate per procedere alla costruzione del sistema, il numero delle variabili esogene può essere qualsiasi, purchè non inferiore a quello delle variabili endogene indipendenti; con la seconda, esse possono superare il numero delle equazioni del sistema, cioè il numero delle variabili endogene, solo se è dato, per quelle che superano tale numero, un criterio di valutazione *ab extra*.

3. *Sistemi di equazioni algebriche e funzionali, lineari e non lineari.* Un problema generale riguarda l'opportunità di usare nelle equazioni del sistema soltanto variabili endogene proprie del periodo produttivo in esame, che quindi risultano tutte ugualmente datate, o anche, ad esempio, le loro variazioni o valori riferiti a periodi produttivi precedenti. È bene, cioè, usare equazioni algebriche o equazioni funzionali?

Un altro problema concerne la linearità o meno delle relazioni, se cioè le equazioni del sistema, algebriche o funzionali che siano, debbano essere lineari o non lineari, e poi se lineari rispetto alle sole variabili endogene o anche alle esogene.

Le equazioni sono lineari quando sono additive di primo grado nelle singole variabili (egualmente datate per quelle algebriche, diversamente datate per quelle a differenze finite, derivate per quelle differenziali). In generale, se si indica con E l'operatore (16) per cui è $x(t-1) = E x(t)$ e, quindi, $x(t-2) = E x(t-1) = E^2 x(t)$, ecc., e con D l'operatore per cui è $\frac{dx}{dt} = D x$, ecc., il più generico sistema lineare (lineare nelle sole variabili endogene) è:

$$\sum_{j=1}^n x_j f_{ij}(e_1, e_2, \dots, e_m, D, E) = g_i(e_1, e_2, \dots, e_m) \quad i = 1, \dots, n$$

(16) Notizie elementari sull'algebra degli operatori sono in R. G. D. ALLEN, *Economia matematica* (trad. dall'inglese), Torino, 1962, p. 792 ss. Si noti però che qui è chiamato E ciò che da Allen è chiamato E^{-1} .

ove le f_{ij} sono funzioni generiche nelle variabili esogene e polinomiali negli operatori E e D .

Esaminando i diversi tipi di equazioni, andando dai più semplici ai più complicati, si ha:

I) sistemi lineari sia nelle variabili endogene che nelle variabili esogene:

a) equazioni algebriche

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

ove le a_{ij} sono costanti numeriche e le b_i parametri esogeni (17);

b) equazioni alle differenze finite

$$\sum_{j=1}^n x_j (a_{ij} + b_{ij} E + c_{ij} E^2 + \dots) = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

ove le a_{ij} , b_{ij} , ..., sono costanti (18) e le b_i parametri esogeni;

c) equazioni differenziali

$$\sum_{j=1}^n x_j (a_{ij} + b_{ij} D + c_{ij} D^2 + \dots) = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

con simbolismo analogo;

II) sistemi lineari solo nelle variabili endogene:

a) equazioni algebriche

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

ove le a_{ij} e le b_i sono parametri esogeni;

(17) Qui e nel seguito, per parametro esogeno si intende una variabile che dipende dai fatti extraeconomici, cioè dai propagatori e dagli entelechiani. Seguendo la seconda via fra le due indicate nel paragrafo precedente, quella cioè in cui si predetermina la forma delle relazioni del sistema, non vi è alcuna differenza fra questo parametro e la variabile esogena ivi definita; seguendo la prima via, quella cioè in cui si predetermina la valutazione dei fatti esogeni, questo parametro risulta una funzione delle variabili in tal modo ottenute.

(18) Se le equazioni sono a differenze finite del primo ordine il fattore di x_j è $a_{ij} + b_{ij} E$, se del secondo ordine è $a_{ij} + b_{ij} E + c_{ij} E^2$, ecc.; analogamente accade per le equazioni differenziali.

b) equazioni alle differenze finite

$$\sum_{j=1}^n x_j (a_{ij} + b_{ij} E + c_{ij} E^2 + \dots) = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

ove a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , ..., b_i sono parametri esogeni;

c) equazioni differenziali

$$\sum_{j=1}^n x_j (a_{ij} + b_{ij} D + c_{ij} D^2 + \dots) = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

con simbolismo analogo;

III) sistemi non lineari:

a) equazioni algebriche

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, e_1, e_2, \dots, e_m) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

b) equazioni alle differenze finite

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, e_1, e_2, \dots, e_m, E) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

ove le f_i sono funzioni generiche nelle variabili e polinomiali nell'operatore E .

c) equazioni differenziali

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, e_1, e_2, \dots, e_m, D) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

con simbolismo analogo.

Il sistema generale assoluto di Demaria (19) è del tipo II) a), è, cioè, lineare nelle variabili endogene e algebrico.

Non possono invece essere assegnati ad alcuno dei tipi indicati nè le equazioni, in genere lineari, considerate dagli econometrici, perchè in esse non vi sono che variabili endogene (20), nè i modelli dinamici (Harrod, Domar, Phillips, Samuelson-Hicks,

(19) G. DEMARIA, *Trattato II, op. cit.*, p. 1289 ss.

(20) Negli attuali studi econometrici si presuppone l'assenza di fattori extraeconomici, o se ne indicano solo alcuni, e si considerano tutti i fattori non esplicitati nello schema come variabili casuali. Sembra però che vi sia una tendenza verso l'introduzione esplicita di un insieme di variabili esogene nei modelli econometrici, anche se tale apparizione è ancora del tutto formale e non sistematica, come in J. S. DUESENBERY, G. FROMM, ecc. *The Brookings Quarterly Econometric Model of the United States*, Amsterdam, 1965.

Goodwin, Kalecki, ecc.), in genere anch'essi lineari (a differenze finite o differenziali) e mancanti delle variabili extraeconomiche.

Seguendo il principio di semplicità si dovrebbe cominciare col saggiare l'adeguatezza dei sistemi più semplici, cioè di quelli lineari algebrici, poi, nel caso che questi si rivelassero insoddisfacenti, di quelli lineari a differenze finite e differenziali, e infine di quelli non lineari; è bene osservare che le difficoltà crescono enormemente, forse insuperabilmente, procedendo lungo questa graduatoria (21).

Un argomento a favore dei sistemi lineari risiede nella naturale approssimazione delle ricerche economiche, che non può certo essere eliminata con una scelta opportuna del tipo di equazione, questa anzi può solo ridurre l'indeterminazione statica; l'ordine di imprecisione apportato dal tipo di equazione può essere comparabile con quella derivante da altre cause senza che l'attendibilità della teoria abbia a soffrirne. Si intravede, perciò, la possibilità di trovare relazioni lineari di accettabile approssimazione; se poi alcuni economisti hanno ritenuto insoddisfacenti le relazioni lineari, e hanno perciò ricercato relazioni non lineari, la causa è da ascrivere, in gran parte, al ripudio parziale o totale, negli schemi teorici da loro adottati, della esogeneità (22).

III.

IL SISTEMA PRODUTTIVO E L'AGGREGAZIONE

1. *Il numero delle variabili endogene e l'aggregazione.* Nulla si è ancora detto sul numero di variabili endogene che il sistema contiene; esso dovrebbe essere elevatissimo poichè l'unità logica a cui tutto deve essere riferito è il singolo soggetto; infatti, prescindendo da altre considerazioni, se si esamina la definizione di ogni variabile endogena in termini operativi, cioè considerando le operazioni con cui esse vengono rilevate, si nota come la misura concerna quanto è proprio di un individuo, di una impresa, e che solo successivamente, per necessità di sintesi, tali valori vengono sommati o mediati in una più vasta cornice. Dalla ne-

(21) A meno che non si abbia un qualche valido motivo per proporre qualche semplice particolare relazione non lineare.

(22) Ciò accade quando si esaminano i cicli economici e se ne ricerca una teoria puramente endogena; si veda P. A. SAMUELSON, *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1958, p. 288.

cessità di ridurre l'immenso numero delle variabili e, conseguentemente, delle equazioni nasce l'aggregazione.

Il numero delle variabili viene ridotto considerando macrovariabili come somma di microvariabili (così si ha la produzione complessiva di un bene come somma della produzione delle singole imprese) o come media; il numero delle equazioni considerando equazioni macro in luogo delle corrispondenti micro (in esse le microvariabili sono sostituite dalle macrovariabili e i microparametri da macroparametri).

L'aggregazione (23) non è però senza difetti, essa apporta delle imperfezioni, configurabili come indeterminazione statica, che è opportuno considerare; è, perciò, interessante conoscere quale sia l'indeterminazione generata dal processo aggregativo e da quali grandezze dipenda.

Si può suddividere idealmente il processo aggregativo in due fasi, la prima consistente nella riduzione delle microvariabili in macrovariabili, la seconda nella condensazione delle microrelazioni in macrorelazioni.

2. *Dalle microvariabili alle macrovariabili. Una prima via: le variabili endogene come grandezze fisiche.* La riduzione delle microvariabili in macrovariabili può seguire due vie.

Se le microvariabili aggregande esprimono, con le specifiche loro dimensioni, le quantità fisiche e i prezzi dei beni, se cioè le microvariabili sono

$$q_a, q'_a, q''_a, \dots, q_b, q'_b, q''_b, \dots, q_c, q'_c, q''_c, \dots \\ p_a, p_b, p_c, \dots$$

ove con a, b, c, \dots è indicato il bene, con q la corrispondente quantità (gli apici distinguono quantità di un medesimo bene riferite a soggetti diversi) e con p il prezzo, allora una misura aggregata è la seguente

$$Q = (q_a + q'_a + q''_a + \dots) \alpha_a + (q_b + q'_b + q''_b + \dots) \alpha_b + \\ + (q_c + q'_c + q''_c + \dots) \alpha_c + \dots$$

(23) Sulle tecniche aggregative vi sono diverse trattazioni; fra queste: H. THEIL, *Linear Aggregation of Economic Relations*, Amsterdam, 1954 (è da notare che per Theil esogeno è sinonimo di predeterminato e non implica alcuna differenza di sostanza con endogeno).

Un'analisi critica dello strumento aggregativo è in G. DEMARIA, *Trattato I, op. cit.*, pp. 92-100.

$$P = \frac{(q_a + q'_a + q''_a + \dots) p_a + (q_b + q'_b + q''_b + \dots) p_b + \dots}{(q_a + q'_a + q''_a + \dots) \alpha_a + (q_b + q'_b + q''_b + \dots) \alpha_b + \dots}$$

ove $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \dots$, sono fattori dimensionali che ragguagliano i beni a, b, c, \dots , in un'unica dimensione logica.

Per compiere il processo aggregativo occorre perciò determinare i fattori $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \dots$. Può allora sembrare conveniente porre

$$\alpha_a = \frac{p_a}{\rho}, \quad \alpha_b = \frac{p_b}{\rho}, \quad \alpha_c = \frac{p_c}{\rho}, \quad \dots$$

ove ρ è un fattore arbitrario (dotato della medesima dimensione logica del prezzo di Q , cioè di P), poichè così si terrebbe conto della diversa importanza economica dei singoli beni; accade però, in tal caso, che risulta

$$P = \rho$$

cioè, in definitiva, l'aggregazione consisterebbe nel porre

$$PQ = (q_a + q'_a + q''_a + \dots) p_a + (q_b + q'_b + q''_b + \dots) p_b + \\ + (q_c + q'_c + q''_c + \dots) p_c + \dots$$

e nello scomporre tale valore fra P e Q in modo arbitrario. Se, ad esempio, si misura la grandezza aggregata in termini equivalenti di bene a , se si pone cioè

$$\alpha_a = 1, \quad \alpha_b = \frac{p_b}{p_a}, \quad \alpha_c = \frac{p_c}{p_a}, \quad \dots$$

risulta

$$Q_{(a)} = q_a + q'_a + q''_a + \dots + (q_b + q'_b + q''_b + \dots) \frac{p_b}{p_a} + \\ + (q_c + q'_c + q''_c + \dots) \frac{p_c}{p_a} + \dots$$

$$P_{(a)} = p_a$$

ciò comporta, però, che ogni movimento nei prezzi dei beni b , c , ..., si riflette unicamente nella grandezza aggregata $Q_{[a]}$ e non sulla $P_{[a]}$ come invece sarebbe logico aspettarsi.

Da questo svantaggio e dalla mancanza di altri criteri ragionevoli per la scelta dei fattori α_a , α_b , α_c , ..., risalta la inadeguatezza di questa metodologia (24) e la necessità di ricorrere alla successiva, che è, peraltro, quella normalmente seguita.

3. *Dalle microvariabili alle macrovariabili. Una seconda via: le variabili endogene come numeri indice.* Se le microvariabili aggregande sono misurate come numeri indice di quantità e di prezzi, se cioè le microvariabili sono

$$\frac{q_{a1}}{q_{a0}}, \frac{q'_{a1}}{q'_{a0}}, \frac{q''_{a1}}{q''_{a0}}, \dots, \frac{q_{b1}}{q_{b0}}, \frac{q'_{b1}}{q'_{b0}}, \frac{q''_{b1}}{q''_{b0}}, \dots$$

$$\frac{p_{a1}}{p_{a0}}, \frac{p_{b1}}{p_{b0}}, \dots$$

allora le macrovariabili sono loro medie ponderate.

Una aggregazione immediata si ha quando la macrograndezza corrispondente alle micrograndezze è la loro somma, ossia per le micrograndezze di eguale dimensione logica e eguale prezzo, per cui

$$Q_a = q_a + q'_a + q''_a + \dots$$

$$Q_b = q_b + q'_b + q''_b + \dots$$

.....

Le macrovariabili corrispondenti sono i numeri indice composti

$$\frac{Q_{a1}}{Q_{a0}} = \frac{q_{a1} + q'_{a1} + q''_{a1} + \dots}{q_{a0} + q'_{a0} + q''_{a0} + \dots} = \frac{q_{a1}}{q_{a0}} \frac{q_{a0}}{Q_{a0}} + \frac{q'_{a1}}{q'_{a0}} \frac{q'_{a0}}{Q_{a0}} + \dots$$

.....

(24) Questa tecnica aggregativa è usata negli studi energetici, misurandosi con un'unica dimensione (tonnellate equivalenti di carbone, o di petrolio, o Calorie, o KWh, ecc.) le diverse fonti di energia; a parte il fatto che, a parità di potere calorifico, le diverse fonti hanno caratteristiche e valori economici differenti, è da rilevare che in questi studi non si indica (e ne sono causa le limitazioni esplicitate nelle suesposte considerazioni) il corrispondente prezzo aggregato dell'energia.

che sono nel contempo numeri indici di Laspeyres e di Paasche, essendovi un medesimo p_{a0} per q_{a0} , q'_{a0} , q''_{a0} , ..., e un medesimo p_{a1} per q_{a1} , q'_{a1} , q''_{a1} , ..., ecc.

Altrimenti (o successivamente), considerando per semplicità medie aritmetiche (25), le macrovariabili sono

$$Q = \frac{Q_{a1}}{Q_{a0}} \alpha_a + \frac{Q_{b1}}{Q_{b0}} \alpha_b + \frac{Q_{c1}}{Q_{c0}} \alpha_c + \dots$$

$$P = \frac{p_{a1}}{p_{a0}} \alpha_a^* + \frac{p_{b1}}{p_{b0}} \alpha_b^* + \frac{p_{c1}}{p_{c0}} \alpha_c^* + \dots$$

ove α_a , α_b , α_c , ..., (per cui è $\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c + \dots = 1$) e α_a^* , α_b^* , α_c^* , ..., (per cui è $\alpha_a^* + \alpha_b^* + \alpha_c^* + \dots = 1$) sono i pesi con cui viene effettuata la media.

Sia il tipo di media che i pesi possono essere scelti con arbitrarietà senza che si possa, razionalmente, ritenere un tipo di media e certi pesi come giusti rifiutando gli altri come errati. Da questa arbitrarietà deriva l'indeterminazione della macrovariabile; i diversi valori ottenibili per la macrovariabile con i diversi tipi di media e con le diverse ponderazioni misurano l'indeterminazione; questa può, se troppo estesa, infirmare la validità di un sistema che si avvalga di siffatte macrovariabili.

4. *Valutazione dell'indeterminazione delle macrovariabili.* Per una valutazione dell'indeterminazione delle macrovariabili e per conoscere da quali fattori dipenda si può far riferimento ai due tipi di numeri indice su cui si sono rivolte maggiormente le preferenze degli economisti, cioè a quelli di Laspeyres e di Paasche (26), ciascuno dei quali è usato per misurare prezzi o quantità.

(25) Sono peraltro possibili altre medie fra i numeri indice elementari (geometriche, armoniche, ecc.); le caratteristiche delle diverse medie di numeri indice sono esaminate in I. FISHER, *The Making of Index Numbers*, Boston-New York, 1923.

(26) Questi due tipi di numeri indice, benchè giudicati buoni (*very good* nella scala di I. Fisher), presentano delle debolezze teoriche, cioè non soddisfano i testi di inversione nel tempo (o nello spazio) e di inversione dei fattori. Altri tipi di numeri indice — ad esempio il numero indice costruito come media geometrica di quelli di Laspeyres e di Paasche (detto *ideale* da I. Fisher) — soddisfano questi testi e sono sotto questo aspetto, peraltro non decisivo, migliori. Ciò non pertanto, anch'essi danno ognuno un valore diverso, sono cioè indeterminati. I ragionamenti che seguono non soffrono alcuna limitazione logica dall'essere applicati ai soli numeri indice di Laspeyres e di Paasche, rimanendo influenzata unicamente la misura dell'indeterminazione.

I numeri indice di Laspeyres per i prezzi e per le quantità sono rispettivamente:

$$P_L = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \quad Q_L = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

in cui si è posto

$$p_{a0} Q_{a0} + p_{b0} Q_{b0} + \dots + = \sum p_0 q_0$$

$$p_{a1} Q_{a0} + p_{b1} Q_{b0} + \dots + = \sum p_1 q_0$$

$$p_{a0} Q_{a1} + p_{b0} Q_{b1} + \dots + = \sum p_0 q_1$$

e, perciò,

$$\alpha_a = \alpha_a^* = \frac{p_{a0} Q_{a0}}{\sum p_0 q_0}, \quad \alpha_b = \alpha_b^* = \frac{p_{b0} Q_{b0}}{\sum p_0 q_0}, \dots$$

Quelli di Paasche sono

$$P_P = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \quad Q_P = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0}$$

in cui si è posto

$$p_{a1} Q_{a1} + p_{b1} Q_{b1} + \dots + = \sum p_1 q_1$$

$$p_{a1} Q_{a0} + p_{b1} Q_{b0} + \dots + = \sum p_1 q_0$$

$$p_{a0} Q_{a1} + p_{b0} Q_{b1} + \dots + = \sum p_0 q_1$$

e, perciò,

$$\alpha_a = \frac{p_{a1} Q_{a0}}{\sum p_1 q_0}, \quad \alpha_b = \frac{p_{b1} Q_{b0}}{\sum p_1 q_0}, \dots$$

$$\alpha_a^* = \frac{p_{a0} Q_{a1}}{\sum p_0 q_1}, \quad \alpha_b^* = \frac{p_{b0} Q_{b1}}{\sum p_0 q_1}, \dots$$

L'indeterminazione, considerando questi due soli tipi di numeri indice, è definita, per i prezzi, da

$$\Delta P = |P_L - P_P|$$

e, per le quantità, da

$$\Delta Q = |Q_L - Q_P|$$

cioè dalla differenza, in valore assoluto, fra i due tipi di numeri indice.

Si può innanzitutto affermare che l'indeterminazione è uguale sia per i numeri indice dei prezzi che per quelli delle quantità, se misurata in valore relativo, sempre che, naturalmente, siano identiche le micrograndezze da cui essi sono tratti.

È cioè

$$\frac{\Delta P}{P_L} = \frac{\Delta Q}{Q_L} \quad \frac{\Delta P}{P_P} = \frac{\Delta Q}{Q_P}$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{P_L} &= \frac{\left| \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} - \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \right|}{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}} = \left| 1 - \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_1 q_0} \right| = \\ &= \left| 1 - \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0} \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_0 q_1} \right| = \left| 1 - \frac{Q_P}{Q_L} \right| = \frac{|Q_L - Q_P|}{Q_L} = \frac{\Delta Q}{Q_L} \end{aligned}$$

e analogamente per l'altra relazione.

Si ha, quindi, ad esempio, che quando l'indeterminazione è del 10% per il numero indice dei prezzi, essa è anche del 10% per il numero indice delle quantità, e viceversa (27).

(27) Si può inoltre affermare che se il numero indice di Laspeyres è maggiore di quello di Paasche per i prezzi, lo è anche per le quantità, e viceversa. Ciò appare dalla medesima dimostrazione.

La relazione che permette di misurare l'indeterminazione e di determinare i fattori che vi influiscono è:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta Q}{Q} \simeq \left| \frac{\Sigma (p_1 - P p_0) (q_1 - Q q_0)}{\Sigma p_1 q_1} \right|$$

o anche:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta Q}{Q} \simeq \left| \frac{\Sigma \left(\frac{p_1}{p_0} - P \right) \left(\frac{q_1}{q_0} - Q \right) p_0 q_0}{P Q \Sigma p_0 q_0} \right|$$

ove P e Q sono numeri indice per i prezzi e per le quantità intermedi fra quelli di Laspeyres e quelli di Paasche.

Per verificare questa relazione occorre sviluppare il secondo membro e porre successivamente $P Q \simeq \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ (come sarebbe esattamente se fosse verificata la prova di inversione dei fattori,

il che accade per $P = \sqrt{P_L P_P}$ e $Q = \sqrt{Q_L Q_P}$, poi

$P \Sigma p_0 q_1 \simeq Q \Sigma p_1 q_0$ (relazione verificata perfettamente sia

per $P = P_L$ e $Q = Q_L$, che per $P = P_P$ e $Q = Q_P$

e ancora per $P = \sqrt{P_L P_P}$ e $Q = \sqrt{Q_L Q_P}$ o $P = \frac{P_L + P_P}{2}$

e $Q = \frac{Q_L + Q_P}{2}$ o $P = \frac{1}{\frac{1}{P_L} + \frac{1}{P_P}}$ e $Q = \frac{1}{\frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_P}}$, ecc.)

e infine $P \simeq \frac{P_L + P_P}{2}$, $Q \simeq \frac{Q_L + Q_P}{2}$.

Si ha infatti

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Sigma \left(\frac{p_1}{p_0} - P \right) \left(\frac{q_1}{q_0} - Q \right) p_0 q_0}{P Q \Sigma p_0 q_0} \right| = \\ & = \left| \frac{\Sigma p_1 q_1 - Q \Sigma p_1 q_0 - P \Sigma p_0 q_1 + P Q \Sigma p_0 q_0}{P Q \Sigma p_0 q_0} \right| \simeq \\ & \simeq \left| 2 - \frac{2 Q \Sigma p_1 q_0}{P Q \Sigma p_0 q_0} \right| = \left| 2 - 2 \frac{P_L}{P} \right| \simeq \\ & \simeq \left| \frac{P_L + P_P - 2 P_L}{P} \right| = \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta Q}{Q} \end{aligned}$$

Indicando, poi, con σ_P e σ_Q le grandezze

$$\sigma_P = \left[\frac{\Sigma \left(\frac{p_1}{p_0} - P \right)^2 p_0 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \sigma_Q = \left[\frac{\Sigma \left(\frac{q_1}{q_0} - Q \right)^2 p_0 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \right]^{\frac{1}{2}}$$

e con r_{PQ} (28)

$$r_{PQ} = \frac{\Sigma \left(\frac{p_1}{p_0} - P \right) \left(\frac{q_1}{q_0} - Q \right) p_0 q_0}{\sigma_P \sigma_Q \Sigma p_0 q_0}$$

risulta

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta Q}{Q} \simeq \frac{|r_{PQ}| \sigma_P \sigma_Q}{P Q}$$

Si deduce quindi che l'indeterminazione è in relazione inversa col valore delle macrovariabili e in relazione diretta con il coeffi-

(28) σ_P e σ_Q indicano veri e propri scarti quadratici medi per P e Q eguali ai corrispondenti indici di Laspeyres; r_{PQ} indica un vero e proprio coefficiente di correlazione sotto la medesima condizione. Risulta inoltre che per $r_{PQ} > 0$ gli indici di Paasche superano quelli di Laspeyres, e viceversa per $r_{PQ} < 0$; ciò appare dalla dimostrazione suesposta.

ciente di correlazione fra le microvariabili aggregande, cioè fra i numeri indice elementari dei prezzi e quelli delle quantità riferite ad una medesima coordinata spazio-temporale, e con le loro dispersioni misurate dagli scarti quadratici medi con pesi eguali ai valori iniziali.

5. *L'aggregazione e la scelta delle macrovariabili.* Si ha in tal modo un primo criterio guida dell'aggregazione: occorre che le macroentità a cui il sistema produttivo è riferito siano rappresentate da macrovariabili dotate di una limitata indeterminazione. Ciò richiede che risultino favorevoli gli individuati fattori che influiscono sulla grandezza dell'indeterminazione, ossia, fondamentalmente, che le microvariabili aggregande abbiano valori non troppo dissimili fra loro. Le relazioni suindicate permettono una misura dell'ordine di grandezza dell'indeterminazione e quindi la possibilità di stabilire quali variabili aggregare e quale sia il prezzo, in termini di indeterminazione, che si accompagna ad una maggiore o minore aggregazione. Questo criterio sarà completato dalle considerazioni sulla seconda fase ideale dell'aggregazione, cioè del condensamento delle microrelazioni in macrorelazioni; se ne dedurrà che i soggetti, a cui sono riferiti le microvariabili e le microrelazioni, sono riducibili, senza frustranti indeterminazioni, in macroentità solo se si manifesta una soddisfacente uniformità *nelle leggi di formazione e di comportamento che le governano* (29).

6. *Dalle microequazioni alle macroequazioni. Dai microparametri ai macroparametri. L'aggregazione nei sistemi algebrico lineari.* È bene ora esaminare la seconda fase ideale dell'aggregazione che consiste nel ridurre il numero delle equazioni a quello delle macrovariabili. Si condensano delle microrelazioni in macrorelazioni (se, ad esempio, certe microrelazioni stabiliscono un certo comportamento di impresa, con la macrorelazione si osserva quel certo comportamento per la « industria »); la condensazione si ottiene mediante una combinazione delle microrelazioni aggregande. Questa aggregazione, nella sua più semplice espressione, è aggregazione lineare, si compie cioè mediante una combinazione lineare delle microrelazioni.

(29) G. DEMARIA, *Trattato II, op. cit.*, p. 1261.

I pesi (30) con cui si compie la combinazione lineare non sono univocamente determinabili, possono essere scelti arbitrariamente, così come possono essere scelti arbitrariamente i pesi con cui si calcolano dalle microvariabili le macrovariabili; essi valutano l'importanza delle microrelazioni nell'ambito della macrorelazione così come quelli valutano l'importanza delle microvariabili nell'ambito della macrovariabile.

Sia il sistema della produzione a livello micro del tipo

$$\sum_{u=1}^s a_{ru} x_u = b_r \quad r = 1, \dots, s$$

cioè algebrico lineare; in esso le a_{ru} e b_r sono parametri esogeni (31) e le x_u microvariabili endogene (quelle cioè indicate precedentemente con $\frac{q_{a1}}{q_{a0}}, \frac{q'_{a1}}{q'_{a0}}, \frac{q''_{a1}}{q''_{a0}}, \dots, \frac{q_{b1}}{q_{b0}}, \frac{q'_{b1}}{q'_{b0}}, \frac{q''_{b1}}{q''_{b0}}, \dots, \dots, \frac{p_{a1}}{p_{a0}}, \frac{p_{b1}}{p_{b0}}, \frac{p_{c1}}{p_{c0}}, \dots$).

Sia il sistema della produzione a livello macro del tipo

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} X_j = B_i \quad i = 1, \dots, n$$

in esso le X_j sono le macrovariabili e le A_{ij} e le B_i i macroparametri.

Ogni macrovariabile è ricavata dalla aggregazione di certe microvariabili e ogni macroequazione dalla aggregazione di certe microequazioni; i macroparametri risultano determinati da queste aggregazioni e dipendono dai criteri seguiti per esse.

Sia la i -esima macroequazione derivata dalla aggregazione delle prime v microequazioni e la j -esima macrovariabile derivata

(30) Tali pesi sono applicati ad equazioni che di per se stesse sono determinate a meno di un fattore proporzionale (è cioè identico scrivere $3x + 4y = 5$ e $6x + 8y = 10$), per cui il confronto fra le diverse microrelazioni aggregande deve essere tale da non risultare influenzato da questa indeterminazione; ciò accade se si considerano anziché gli $s+1$ parametri $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rs}, b_r$, gli s parametri $\frac{a_{r1}}{b_r}, \frac{a_{r2}}{b_r}, \dots, \frac{a_{rs}}{b_r}$.

(31) Si fa perciò riferimento al sistema lineare del tipo II) a).

dalla aggregazione delle prime w microvariabili (32); allora, aggregando le prime v microequazioni

$$\sum_{u=1}^w a_{ru} x_u = b_r \quad r = 1, \dots, v$$

con pesi $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v$ (per cui è $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v = 1$), si ricava l'equazione

$$\sum_{r=1}^v \beta_r \sum_{u=1}^w \frac{a_{ru}}{b_r} x_u = 1$$

A questa equazione corrisponde nel macrosistema l'equazione

$$\sum_{j=1}^n \frac{A_{ij}}{B_i} X_j = 1$$

Risulta cioè che per giungere al macrosistema si deve porre

$$\frac{A_{ij}}{B_i} X_j = \sum_{r=1}^v \sum_{u=1}^w \beta_r \frac{a_{ru}}{b_r} x_u$$

cioè, essendo

$$X_j = \sum_{u=1}^w \alpha_u x_u$$

ove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_w$ (per cui è $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_w = 1$) sono pesi con cui si sono aggregate le microvariabili x_1, x_2, \dots, x_w

$$\frac{A_{ij}}{B_i} = \frac{\sum_{r=1}^v \sum_{u=1}^w \beta_r \frac{a_{ru}}{b_r} x_u}{\sum_{u=1}^w \alpha_u x_u}$$

(32) Il ragionamento non soffre di alcuna limitazione per essersi considerate le prime equazioni e le prime variabili; ognuna può diventare prima con una opportuna diversa numerazione.

o anche

$$\frac{A_{ij}}{B_i} = \frac{\sum_{r=1}^v \sum_{u=1}^w \alpha_u \beta_r x_u \frac{a_{ru}}{\alpha_u b_r}}{\sum_{r=1}^v \sum_{u=1}^w \alpha_u \beta_r x_u}$$

Se ne deduce che i macroparametri sono una media ponderata dei microparametri, corretti con i pesi assegnati alle microvariabili che essi moltiplicano, e che i pesi con cui tali microparametri vengono mediati sono il prodotto fra i pesi con cui si sono aggregate le corrispondenti microequazioni, i pesi con cui si sono aggregate le microvariabili che essi moltiplicano e queste stesse microvariabili; il macroparametro $\frac{A_{ij}}{B_i}$ è cioè una media ponderata delle micrograndezze $\frac{a_{ru}}{\alpha_u b_r}$ con pesi

$$\frac{\alpha_u \beta_r x_u}{\sum_{r=1}^v \sum_{u=1}^w \alpha_u \beta_r x_u} = \frac{\alpha_u \beta_r x_u}{\sum_{r=1}^v \alpha_u x_u},$$

con $r = 1, \dots, v$ e $u = 1, \dots, w$.

Si osserva subito oltre alla dipendenza dei macroparametri dalla scelta dei pesi α_u e β_r , per cui da essa deriva loro una indeterminazione (che sarà esaminata nei suoi fattori successivamente), anche la loro dipendenza dalle microvariabili endogene x_u , fatto questo che comporta la accettabilità della natura prevalentemente esogena dei macroparametri soltanto se la macrovariabile si compone di microvariabili poco dissimili fra loro, se cioè l'indeterminazione propria delle macrovariabili è ristretta.

7. *Il medesimo problema con il calcolo delle matrici.* Una visione sintetica e illuminante del processo aggregativo si ha con lo strumento matriciale.

Sia

$$a x = b$$

con a matrice quadrata di ordine s , x e b vettori di s elementi, il microsistema, e

$$A X = B$$

con A matrice quadrata di ordine n , X e B vettori di n elementi, il macrosistema. L'aggregazione fa corrispondere a un sottovettore di w elementi di x un elemento del vettore X , a un sottovettore di v elementi di b un elemento del vettore B e a una sottomatrice ($v \times w$) di a un elemento della matrice di A ; cioè

$$x_j = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix} \rightarrow X_j \quad b_i = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_v \end{bmatrix} \rightarrow B_i$$

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1w} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2w} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v1} & a_{v2} & \dots & a_{vw} \end{bmatrix} \rightarrow A_{ij}$$

La macrovariabile X_j viene ricavata dal sottovettore micro per mezzo di un vettore riga α_j , i cui elementi sono i pesi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_w$; è cioè

$$X_j = \alpha_j x_j = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_w] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix} = \sum_{u=1}^w \alpha_u x_u$$

Il macroparametro B_i viene ricavato dal corrispondente sottovettore micro b_i , per mezzo di un vettore riga β_i^* i cui elementi sono i pesi $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_v^*$ (33); è cioè

(33) Questi pesi β_r^* differiscono dai precedenti β_r per il termine b_r , cioè $\beta_r^* = \frac{\beta_r/b_r}{\sum_{r=1}^v \beta_r/b_r}$; deve essere infatti anche $\beta_1^* + \beta_2^* + \dots + \beta_v^* = 1$.

$$B_i = \rho_i \beta_i^* b_i = \rho_i [\beta_1^* \beta_2^* \dots \beta_v^*] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_v \end{bmatrix} = \rho_i \sum_{r=1}^v \beta_r^* b_r$$

con ρ_i fattore arbitrario.

Il macroparametro A_{ij} risulta ricavato dalla corrispondente sottomatrice di microparametri a_{ij} , per mezzo dei due vettori β_i e x_j , rapportando il valore così ottenuto a quello di X_i , ossia di $\alpha_j x_j$; è cioè

$$A_{ij} = \rho_i \frac{\beta_i^* a_{ij} x_j}{\alpha_j x_j} = \rho_i \frac{[\beta_1^* \beta_2^* \dots \beta_v^*] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1w} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{v1} & \dots & a_{vw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix}}{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_w] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix}} =$$

$$= \rho_i \frac{\sum_{r=1}^v \sum_{u=1}^w \beta_r^* x_u a_{ru}}{\sum_{u=1}^w \alpha_u x_u}$$

con ρ_i eguale al precedente fattore arbitrario (34).

(34) Ponendo $\beta_r^* = \frac{\beta_r/b_r}{\sum_{r=1}^v \beta_r/b_r}$ si ricava

$$\frac{A_{ij}}{B_i} = \frac{\rho_i \frac{\sum_r \sum_u \beta_r^* x_u a_{ru}}{\sum_u \alpha_u x_u}}{\rho_i \sum_r \beta_r^* b_r} = \frac{\sum_r \sum_u \beta_r/b_r x_u a_{ru}}{\sum_r \beta_r/b_r \sum_u \alpha_u x_u} = \frac{\sum_r \sum_u \beta_r x_u \frac{a_{ru}}{b_r}}{\sum_r \beta_r \sum_u \alpha_u x_u}$$

così come deve essere.

Si vede così come con l'aggregazione si condensino sottovettori e sottomatrici in uniche variabili e come agiscano, in tale processo, i pesi.

8. *L'indeterminazione dei macroparametri.* Per conoscere da quali grandezze dipenda l'indeterminazione dei macroparametri (indeterminazione, come si è visto, legata alla non determinabilità del criterio di ponderazione), occorre considerare una diversa scelta dei pesi e valutarne gli effetti. Si ha allora, ponendo $\frac{A_{ij}}{B_i}$ come valore dei macroparametri in corrispondenza ai pesi α_u e β_r , e $\frac{A'_{ij}}{B'_i}$ come valore dei macroparametri in corrispondenza ai pesi α'_u e β'_r , che l'indeterminazione è misurata da

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(A_{ij}/B_i)}{A_{ij}/B_i} &= \frac{A'_{ij}/B'_i - A_{ij}/B_i}{A_{ij}/B_i} = \frac{A'_{ij}/B'_i}{A_{ij}/B_i} - 1 = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^v \sum_{m=1}^w \beta'_k \frac{a_{km}}{b_k} x_m}{\sum_{k=1}^v \sum_{m=1}^w \beta'_k \alpha'_m x_m} - 1 = \\ &= \frac{\sum_{r=1}^v \sum_{u=1}^w \beta_r \frac{a_{ru}}{b_r} x_u}{\sum_{r=1}^v \sum_{u=1}^w \beta_r \alpha_u x_u} - 1 = \\ &= \frac{\sum_{r=1}^v \beta_r \sum_{k=1}^v \beta'_k \sum_{u=1}^w \alpha_u x_u \sum_{m=1}^w \alpha'_m x_m \frac{a_{ru}}{\alpha_u b_r} \left(\frac{\frac{a_{km}}{\alpha'_m b_k} - \frac{a_{ru}}{\alpha_u b_r}}{\frac{a_{ru}}{\alpha_u b_r}} \right)}{\sum_{r=1}^v \beta_r \sum_{k=1}^v \beta'_k \sum_{u=1}^w \alpha_u x_u \sum_{m=1}^w \alpha'_m x_m \frac{a_{ru}}{\alpha_u b_r}} \end{aligned}$$

L'indeterminazione dei macroparametri dipende allora dalle mutue differenze relative fra i fattori $\frac{a_{ru}}{\alpha_u b_r}$, risultando una media ponderata di esse, dipende cioè:

a) dalla dispersione dei fattori $\frac{a_{ru}}{\alpha_u b_r}$ (se questa è nulla, ossia se tali fattori sono fra loro eguali, l'indeterminazione è nulla),

b) dai pesi che è possibile scegliere (se questi sono poco diversi fra loro, se cioè $\beta'_r \simeq \beta_r$ e $\alpha'_u \simeq \alpha_u$, l'indeterminazione è minore).

Altre considerazioni in merito possono compiersi una volta che si specificano i possibili diversi criteri di ponderazione. Così, ad esempio, se si considera la sola variabilità dei pesi α_u e questi possono essere del tipo che conduce a numeri indice Laspeyres o Paasche (35), risulta essere

$$\frac{(A_{ij}/B_i)_P - (A_{ij}/B_i)_L}{(A_{ij}/B_i)_L} = \frac{Q_L - Q_P}{Q_P}$$

se X_i è una quantità, e

$$\frac{(A_{ij}/B_i)_P - (A_{ij}/B_i)_L}{(A_{ij}/B_i)_L} = \frac{P_L - P_P}{P_P}$$

se X_i è un prezzo; cioè il campo di indeterminazione dei macroparametri è pressappoco eguale a quello delle macrovariabili per cui sono moltiplicati in modo che il prodotto $\frac{A_{ij}}{B_i} X_i$, non risulta soggetto a questa indeterminazione (infatti il prodotto $\frac{A_{ij}}{B_i} X_i$, dipende solo dai pesi β e non dai pesi α).

9. *L'aggregazione nei sistemi lineari a differenze finite e differenziali.* Quanto si è indicato finora per i sistemi algebrico lineari può essere esteso ai sistemi di equazioni a differenze finite e differenziali lineari.

(35) I pesi che conducono a numeri indice Laspeyres sono $\alpha_u = \frac{p_{u0} q_{u0}}{\sum p_{u0} q_{u0}}$;

quelli che conducono a numeri indice Paasche, sono, per le quantità (cioè per $x_u = \frac{q_{u1}}{q_{u0}}$) $\alpha_u = \frac{p_{u1} q_{u0}}{\sum p_{u1} q_{u0}}$, per i prezzi (cioè per $x_u = \frac{p_{u1}}{p_{u0}}$) $\alpha_u = \frac{p_{u0} q_{u1}}{\sum p_{u0} q_{u1}}$.

Infatti, se il generale microsistema è del tipo (36)

$$\sum_{u=1}^s (a_{ru} + b_{ru} E + c_{ru} E^2 + \dots) x_u = b_r \quad r = 1, \dots, s$$

e il macrosistema è

$$\sum_{j=1}^n (A_{ij} + B_{ij} E + C_{ij} E^2 + \dots) X_j = B_i \quad i = 1, \dots,$$

risulta essere, posto sempre che le macrovariabili siano

$$X_j = \sum_{u=1}^w \alpha_u x_u$$

che

$$\frac{A_{ij}}{B_i} = \frac{\sum_{r=1}^v \sum_{u=1}^w \beta_r x_u \frac{a_{ru}}{b_r}}{\sum_{u=1}^w \alpha_u x_u}$$

$$\frac{B_{ij}}{B_i} = \frac{\sum_{r=1}^v \sum_{u=1}^w \beta_r x_u \frac{b_{ru}}{b_r}}{\sum_{u=1}^w \alpha_u x_u}$$

$$\frac{C_{ij}}{B_i} = \frac{\sum_{r=1}^v \sum_{u=1}^w \beta_r x_u \frac{c_{ru}}{b_r}}{\sum_{u=1}^w \alpha_u x_u}$$

.....

essendo l'equazione ottenuta come combinazione delle prime microequazioni

$$\sum_{r=1}^v \beta_r \sum_{u=1}^s \frac{a_{ru} + b_{ru} E + c_{ru} E^2 + \dots}{b_r} x_u = 1$$

(36) Si adotta il simbolismo già usato per le equazioni a differenze finite. Per le equazioni differenziali è sufficiente sostituire il simbolo operatoriale E con D .

Cioè quanto è stato esposto nei riguardi dei macroparametri $\frac{A_{it}}{B_t}$ quali risultano dal processo aggregativo di un sistema algebrico lineare, può essere identicamente ripetuto per i macroparametri $\frac{B_{it}}{B_t}$, $\frac{C_{it}}{B_t}$, ..., ossia per i macroparametri che moltiplicano le variabili con diversa datazione o le derivate.

10. *L'aggregazione e le « industrie ».* *Definizione operativa di « industria ».* L'uso di variabili aggregate e di equazioni fra esse per rappresentare la realtà dinamica della produzione, se è necessario per evidenti ragioni di sintesi, non è privo di distorsioni che impediscono una indiscriminata scelta di macrovariabili e di macrorelazioni.

Le considerazioni svolte in questa terza parte, oltre a rilevare l'indeterminazione nelle variabili e nei parametri che deriva dal processo aggregativo, indicano i fattori che influiscono sulla grandezza di tale indeterminazione e quindi come evitare che il sistema perda, per le distorsioni dell'aggregazione, di validità. Infatti, si è visto come già perchè le macrovariabili abbiano una limitata indeterminazione occorra contenere entro limiti adeguati la diversità delle microvariabili che tali macrovariabili sintetizzano; occorre cioè, una volta che si sia stabilito il livello di approssimazione desiderato (37), ossia l'ordine di grandezza $\frac{\Delta X}{X}$, che i fattori individuati (limitando l'esame ai numeri indice di Laspeyres e di Paasche si è trovato che essi sono r_{PQ} , σ_P , σ_Q , P , Q , secondo la relazione $\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta Q}{Q} \simeq \frac{|r_{PQ}| \sigma_P \sigma_Q}{P Q}$) non comportino una indeterminazione maggiore, per ogni coordinata spazio-temporale in cui tali macrovariabili sono considerate. Limitata indeterminazione è necessaria anche per i macroparametri; questa dipende dalle diversità dei microparametri che tali macroparametri sintetizzano ed è collegata a quella propria delle macrovariabili oltre che per la loro comune dipendenza dalla ponderazione delle microvariabili (però la indeterminazione dei macroparametri dipende anche dalla ponderazione delle micro-

(37) Questo non è assolutamente arbitrario, dipende dalle altre cause di imprecisione; occorre perciò contemperare le diverse esigenze accontentandosi di livelli adeguati ad esse.

quazioni) anche per la influenza microendogena sui macroparametri, influenza che è minore con una minore indeterminazione delle macrovariabili.

Le microequazioni rappresentano il comportamento dei soggetti della produzione e le macroequazioni quello di insiemi di soggetti, così come le microvariabili sono proprie dei singoli soggetti e le macrovariabili di insiemi di soggetti.

Il problema si pone in questi termini: quali soggetti devono essere aggregati in ciascuna macroentità, in modo che il mondo della produzione possa essere rappresentato con variabili riferite ad esse e con equazioni che esprimono il loro comportamento senza che a tale aggregazione consegua una invalidante indeterminazione?

Le considerazioni esposte in questa terza parte permettono di individuare, in modo operativo, tali macroentità come quelle per cui le microentità che le compongono sono misurate da variabili poco dissimili fra loro che seguono leggi poco diverse; in questo caso, infatti, le indeterminazioni delle macrovariabili riferite a tali macroentità e dei macroparametri delle leggi che esse seguono sono inferiori all'ordine di approssimazione della teoria (38). Tali macroentità sono le « industrie »; le macrovariabili e le macroequazioni del sistema della produzione devono perciò essere riferite alle « industrie » così definite (39).

(38) Naturalmente, perchè possa essere specificamente indicato quali siano i soggetti che compongono le diverse « industrie » occorre individuare il loro comportamento per stabilire il grado di difformità fra i microparametri e i possibili criteri di ponderazione fra le microequazioni.

(39) Scrive G. DEMARIA, *Trattato II, op. cit.*, pp. 1261-1262: Sei sono le « industrie » sistematicamente indispensabili in ogni sistema generale assoluto. Esse si distinguono non già per disuguaglianze quantitative di valore o fisiche o tecnologiche, o di situazione e di movimento dei loro prodotti o dei loro fattori di produzione, ma per una diversità universale nelle leggi di formazione e di comportamento che le governano (sebbene le relative frontiere non siano mai del tutto esaurienti e invalicabili). Ossia in ogni sistema produttivo campeggiano continuamente le seguenti « industrie »:

I) primarie od originarie o basiche (agricoltura, miniere, energie industriali),

II) intermedie o dei prodotti semi-finiti o di trasformazione o manifatturiere,

III) dei servizi di produzione privati (trasporti, commercio, banche, assicurazioni),

IV) dei beni e dei servizi categorici della pubblica amministrazione o dei beni e dei servizi produttivi pubblici,

V) dei beni e dei servizi di consumo durevoli e non durevoli privati (edilizia, industrie leggere, industrie dei beni vitali, di comodo, di lusso),

VI) dei beni e dei servizi non categorici della pubblica amministrazione o dei beni e dei servizi di consumo durevoli e non durevoli pubblici.