MARIO ARCELLI

VALIDITÀ TEORICA DI UNA IMPOSTAZIONE NEOCLASSICA DELLA FORMAZIONE DEL CAPITALE

1. Mentre sarebbe assurdo volere impostare un discorso sulla validità empirica degli schemi walrasiani, il riconoscimento della loro fecondità euristica rende ancora attuale la discussione della loro coerenza logica e della significatività economica delle soluzioni. Sotto questo aspetto, a mio avviso, il tempo sta faticosamente rendendo giustizia anche in Italia ai modelli walrasiani.

Negli ultimi anni vi è stata qui da noi una grossa discussione, cui hanno partecipato numerosi economisti e al centro del dibattito s'è posto il problema dell'esistenza di soluzioni economicamente significative del modello con accumulazione di capitale.

Come è ben noto Walras non fornì alcuna dimostrazione dell'esistenza di soluzioni del suo modello. La prima prova di esistenza di soluzioni (e di unicità) è stata fornita da Wald. Seguirono le brillanti dimostrazioni di Arrow, Debreu, McKenzie, Gale, Dorfman Samuelson e Solow, Kuhn per citare i più noti.

Essi si avvalsero dei più moderni strumenti della topologia e utilizzarono ampiamente il teorema del punto fisso di Brower o quello più generale di Kakutani. Tutte queste dimostrazioni tuttavia, concentrarono la loro attenzione sul modello di scambio o su quello di produzione o simultaneamente su entrambi, ma trascurarono il problema dell'accumulazione del capitale che presentava le maggiori complessità, anche per la non cristallina definizione delle ipotesi sottostanti il modello.

Tuttavia anche per il modello completo, comprendente cioè il problema dell'accumulazione, è stata fornita una ineccepibile

dimostrazione di esistenza di soluzioni economicamente significative da parte di Morishima nel 1960. Tale dimostrazione apparsa sulla *Zeitschrift für Nationalökonomie* e più tardi inclusa nel volume *Equilibrium Stability and Growth* è stata sfortunatamente recepita con ritardo in Italia, ché altrimenti molte discussioni sarebbero state evitate o comunque sarebbero state meglio orientate.

Così abbiamo sentito accanirsi sul modello walrasiano di accumulazione le accuse più disparate e talvolta, almeno apparentemente contraddittorie, di indeterminazione e di sovradeterminazione.

Neppure il riconoscimento della validità della dimostrazione di Morishima ha tuttavia acquietato le acque: contro il modello walrasiano sono state recentemente sollevate nuove critiche da parte di Zaghini e recentemente è stato formulato un modellino da parte di Graziani-Trezza che tenderebbe a dimostrare che l'equilibrio walrasiano è indeterminato e in qualche caso persino impossibile. La discussione non è stata però inutile. Essa è valsa a precisare il contenuto delle ipotesi e a sottolineare talune difficoltà del modello di accumulazione.

Da parte mia ritengo che gli studi di Zaghini e Graziani-Trezza, pubblicati nel corso dell'ultimo anno sul *Giornale degli Economisti*, riassumano gli attuali punti del problema ancora in discussione. Mi soffermerò pertanto su di essi, scusandomi se trascurerò altri aspetti del tema. Non solo: cercherò di avvalermi delle serrate argomentazioni logiche di Graziani-Trezza per sgombrare il terreno dalle obiezioni di Zaghini, mentre dimostrerò che il modello walrasiano d'accumulazione è generalmente determinato, anche se la soluzione non è necessariamente unica.

Modificando opportunamente il primitivo schema walrasiano, dimostrerò altresì che sia il modello di accumulazione, sia quello più complesso (di accumulazione e produzione) comprendente beni di consumo, ove siano rispettate le tradizionali assunzioni di convessità dell'insieme produttivo e di continuità delle domande posseggono sempre soluzioni economicamente significative, rilevando che Graziani-Trezza sono incorsi in una svista. La trattazione mi consentirà anche di porre in evidenza che ai fini della dimostrazione dell'esistenza di soluzioni significative, non è rilevante contrapporre le ipotesi di Graziani-Trezza

a quelle più restrittive di Morishima. Infine mi soffermerò brevemente su taluni problemi della stabilità dell'equilibrio.

2. Zaghini presenta un modello d'accumulazione walrasiano di tipo puro (1) nel senso che i soli prodotti sono beni capitail e le risorse iniziali sono costituite solo da capitali, di modo che vengono eliminati dal quadro sia i beni di consumo, sia i fattori non riproducibili. Il modello si compone di tre gruppi di equazioni: il primo gruppo esprime la condizione che in equilibrio le quantità domandate dei servizi dei beni capitali sono uguali alle quantità offerte; il secondo gruppo esprime la condizione di uguaglianza tra costo di produzione e prezzo di ogni bene capitale; il terzo gruppo esprime la condizione che il prezzo di ogni bene capitale è pari alla capitalizzazione del prezzo del suo servizio, effettuata ad un unico tasso di rendimento.

Vi è infine un'ultima equazione, espressiva della legge di Walras: e cioè il valore dei beni capitali prodotti è uguale al risparmio.

Quest'ultima relazione, tuttavia, si dimostra non essere indipendente dalle precedenti relazioni, per cui essendo sovrabbondante può essere eliminata. Non così per Zaghini che cerca di dimostrare, erroneamente secondo noi, che essa rappresenta una genuina condizione d'equilibrio.

Nello scrivere le precedenti relazioni, Zaghini assume che il numero dei processi produttivi sia pari al numero dei beni prodotti; che con ogni processo si produca un solo bene; che vi siano coefficienti fissi di produzione e la produzione abbia pertanto luogo a rendimenti costanti; che le quantità prodotte dei nuovi beni non possano essere impiegate nel periodo considerato; che non vi siano beni intermedi e che i beni capitali non si logorino. Ipotesi quest'ultima comunque, non essenziale al modello.

Le assunzioni dello Zaghini appaiono in linea con la formulazione di Walras; lo stesso si può per dire i dati del problema, costituiti dai coefficienti tecnici e dalle risorse iniziali.

---

(1) Si veda E. ZAGHINI, *Saggi su l'accumulazione di capitale nei modelli di equilibrio generale*, Ed. Ateneo, Roma 1967.

Il primo saggio dal titolo *Il problema dell'esistenza di soluzioni economicamente significative nel modello walrasiano d'accumulazione*, è quello direttamente pertinente il tema ed è stato riprodotto in *Giornale degli Economisti*, n. 5-6, 1968.

Il vettore delle risorse iniziali deve essere positivo, mentre i coefficienti tecnici devono essere non negativi e almeno uno per ogni colonna deve essere positivo, ciò che equivale ad escludere che sia possibile produrre qualcosa dal nulla.

L'irriducibilità della matrice dei coefficienti di produzione, cioè il fatto che ogni bene partecipi direttamente o indirettamente alla produzione di tutti gli altri beni, benché semplifichi la discussione del modello, si dimostra ipotesi non essenziale e può quindi essere assunta o negata a piacere.

Dalla discussione del modello emerge immediatamente che la condizione di piena occupazione di tutti i fattori produttivi potrebbe comportare una soluzione economicamente non significativa del problema, onde la necessità formale di sostituire le eguaglianze del primo gruppo di equazioni con diseguaglianze, ammettendo esplicitamente la possibilità che la quantità disponibile di qualche fattore sia maggiore della quantità effettivamente impiegata. Ma in tal caso il fattore disoccupato appare sovrabbondante e il prezzo del suo servizio cadrà a zero. Quando ciò si verificasse il modello rileverebbe un'incompatibilità tra dotazione iniziale di risorse e tecnologia, tenuto conto del vincolo che tutti i beni capitali prodotti devono esserlo a condizione di rispettare l'uniformità del rendimento. Zaghini insiste nel sottolineare tale presunta difficoltà del modello walrasiano e ne ricava delle implicazioni rilevanti su cui ci soffermeremo tra breve.

Una volta ammessa la possibilità che qualche fattore sia sovrabbondante e che il prezzo di esso sia nullo, in quanto è nullo il prezzo del suo servizio, diviene indispensabile modificare anche il secondo gruppo di equazioni, introducendo diseguaglianze al posto di eguaglianze.

Infatti poiché il prezzo di un bene capitale è pari alla capitalizzazione del prezzo del suo servizio, il costo di produzione può risultare superiore al suo prezzo, quando è zero il prezzo del suo servizio ma non quello dei beni capitali necessari a produrlo. Bisognerà in tal caso stabilire che la quantità prodotta di un bene capitale è nulla, se il costo di produzione è superiore al prezzo. L'introduzione di diseguaglianze nel primo e secondo gruppo di equazioni ha però l'effetto ulteriore di dividere i beni capitali del modello in tre categorie.

Per un primo insieme di beni (i beni che sono prodotti) tutte le relazioni vengono soddisfatte con segno d'uguaglianza.

prezzi dei servizi di tali beni capitali sono positivi e il loro costo di produzione è pari al prezzo di mercato.

Per un secondo insieme di beni (i capitali che non sono prodotti perché sovrabbondanti) le relazioni vengono soddisfatte come diseguaglianze. Infatti in tal caso il prezzo del servizio del bene è zero, dato che l'offerta eccede la domanda e tale bene non sarà prodotto in quanto il costo di produzione supera il suo prezzo, pari a zero (2).

Infine vi sarà una terza categoria di beni per i quali la relazione del primo gruppo è soddisfatta come eguaglianza, mentre quella del secondo gruppo è soddisfatta come diseguaglianza. Per tali beni non vi sarà produzione, anche se non sono sovrabbondanti, perché il loro costo di produzione eccede il prezzo. Il fatto che l'offerta dei servizi di tali beni incontri una corrispondente domanda farà sì che la condizione del primo gruppo sia risolta come eguaglianza; mentre, dato che il costo di produzione supera il prezzo di mercato, la seconda relazione sarà una disuguaglianza.

Questa terza categoria di beni capitali, contrariamente a quanto affermano Graziani-Trezza, non pare possa essere esclusa in linea di principio dal modello di accumulazione puro (3).

Basti pensare nel semplice caso di un modello a due beni due fattori, a un sistema di programmazione lineare e a una possibile soluzione descritta graficamente dall'incontro dei due vincoli e della funzione obiettivo in un punto di uno dei due assi cartesiani; ciò che equivale a supporre che X_1/b_{11} sia uguale X_2/b_{21} o alternativamente che X_1/b_{12} sia uguale a $X_2/b_{22} : X_i$ essendo le risorse iniziali e b_{ij} i coefficienti di produzione. Il sistema dei prezzi costituisce il sistema dei vincoli del problema duale e deve soddisfare l'ulteriore vincolo di uguaglianza dei rendimenti per i due beni capitali. Nel caso ipotizzato, come risulta immediatamente dalla soluzione grafica, solo uno dei beni

---

(2) Si noti che, in casi particolari, il prezzo del servizio di un fattore potrebbe essere zero pur essendo il fattore pienamente occupato. Nel linguaggio della programmazione lineare tali fattori vengono definiti come sostanzialmente non vincolanti e in quanto tali, sono assimilabili ai fattori relativamente abbondanti sebbene a stretto rigore rientrino nella successiva classe (la terza) di beni.

(3) Si veda A. Graziani - B. Trezza, «Alcune recenti critiche alla teoria walsariana dell'accumulazione», in *Giornale degli Economisti*, n. 3-4, 1969, p. 242 e p. 255.

capitali sarà prodotto, pur essendo completamente impiegati entrambi i fattori disponibili.

Potrebbero pure appartenere alla categoria dei beni utilizzati ma non prodotti, taluni particolari beni capitali, definibili come « non base » nella terminologia sraffiana; beni questi che pur non entrando direttamente o indirettamente nella produzione di tutti i prodotti, sono usati come mezzi di produzione di più beni.

In tal caso la matrice dei coefficienti di produzione non essendo irriducibile potrebbe rappresentarsi con blocchi ordinati causalmente. Il corrispondente sistema di equazioni di prezzi, costruito su tale matrice, darebbe origine a due gruppi di relazioni: un primo gruppo di equazioni omogenee per i prezzi dei beni-base e un secondo blocco di equazioni per i beni non-base che, dopo la risoluzione del primo sottoinsieme, apparirebbe come formato da equazioni non omogenee. Per assicurare soluzione economicamente significativa a tale secondo sottoinsieme, potrebbe rendersi necessario introdurre delle diseguaglianze invece di eguaglianze e ciò in maniera indipendente dal fatto che le disponibilità iniziali di beni in questione siano o meno completamente utilizzate.

Tutto ciò contribuisce a chiarire come la presenza dei beni utilizzati ma non prodotti, possa divenire rilevante in un modello walrasiano completo in cui compaiono anche i beni di consumo: in tal caso infatti, il comparto dei beni non-base potrebbe divenire notevolmente consistente. È però soprattutto per valutare la coerenza formale del modello walrasiano, più che per considerare la rilevanza empirica dei singoli gruppi di beni, che appare opportuno esaminare tutte e tre le categorie di beni capitali, derivandone le conseguenze sulla logica del modello. Ciò è stato fatto con conclusioni discordi da Graziani-Trezza e da Zaghini. Riprenderemo perciò l'argomento.

3. Dall'esistenza delle tre classi di beni capitali, Zaghini trae argomento per osservare che nel modello walrasiano non esiste un saggio uniforme di rendimento per tutti i beni capitali.

Per i beni che sono abbondanti e non vengono prodotti, il saggio di rendimento è indeterminato in quanto è zero il prezzo del loro servizio. Ciò tuttavia non turba la logica del modello dato che tali beni possono essere esclusi dal computo: si tratta di

beni liberi, liberamente utilizzabili. Sono quindi i beni della terza categoria (i beni pienamente utilizzati ma non prodotti) quelli che infrangerebbero l'uniformità del saggio di rendimento. Il loro costo di produzione è superiore al loro prezzo che è positivo: pertanto essi godranno di saggi di rendimento positivi anche se inferiori al tasso massimo che si percepisce uniformemente sui beni capitali appartenenti alla prima categoria.

Per Zaghini tale conclusione non infirma tuttavia la validità del modello, in quanto la ricerca della massimizzazione dei profitti attesi sui nuovi investimenti implica, secondo lui, che siano uguali solo i saggi di rendimento dei beni capitali che vengono prodotti e nei quali si realizzano gli investimenti. Per tali beni il saggio di rendimento è massimo e in equilibrio il saggio d'interesse si uguaglia ad esso.

Dalle argomentazioni precedenti e dal fatto che gli investitori sono esclusivamente interessati ai profitti che si aspettano di ricavare dagli investimenti nei nuovi beni capitali, mentre sono indifferenti rispetto alla forma fisica degli stessi, Zaghini arguisce altresì che « nel modello walrasiano le condizioni rappresentanti il processo di accumulazione sono completamente differenti dalle condizioni di uguaglianza fra domanda e offerta dei singoli beni capitali e pertanto che l'uguglianza fra risparmio lordo e valore dei beni capitali nuovi, essendo essenziale alla determinazione dell'equilibrio, rappresenta una genuina condizione di equilibrio (4). Ecco perché Zaghini inserisce nel suo modello un'equazione addizionale che uguaglia il totale delle remunerazioni dei servizi dei beni capitali disponibili inizialmente, al valore dei nuovi investimenti in capitali.

Da parte nostra respingiamo sia l'affermazione di molteplici saggi di rendimento nel modello walrasiano, sia l'accoglimento dell'equazione di bilancio, quale genuina condizione d'equilibrio, indipendente dai tre gruppi di relazioni in precedenza considerati: tuttavia riteniamo che il modello possa considerarsi determinato.

La logica stringente di Graziani-Trezza ci permetterà di sgombrare il terreno dalle impostazioni erronee di Zaghini, fornendo allo stesso tempo preziose argomentazioni per le nostre tesi.

---

(4) E. Zaghini, *op. cit.*, p. 56.

4. L'ammissione dell'esistenza di saggi di rendimento diversi sui diversi beni capitali intaccherebbe seriamente il significato dell'equilibrio walrasiano, limitando la sua validità a una sola parte dell'universo dei beni. Zaghini perviene a tale conclusione in quanto per definire il tasso di rendimento, egli rapporta il prezzo del servizio al costo di produzione del bene capitale corrispondente, anziché al prezzo di mercato. Così facendo non si rende però conto che la sua definizione presta il fianco ad obiezioni sostanziali.

In effetti per i capitali utilizzati ma non prodotti non esiste un costo di produzione corrente: potrà, se caso, trattarsi di un costo ipotetico o di un costo storico.

Se tuttavia il tasso di rendimento fa riferimento a un costo ipotetico, il fatto di avere saggi non uniformi per i diversi beni capitali, non incide sulle relazioni effettive del modello; mentre se il riferimento è relativo a un costo storico, allora la differenza di rendimento, che sarebbe meglio denominare quasi-rendita, si verifica indistintamente per tutti i beni capitali, anche per quelli regolarmente prodotti, a meno di supporre un sistema di prezzi immutabili nel tempo. Tale fenomeno è però del tutto scontato e non contraddice le assunzioni dell'equilibrio economico generale.

Se viceversa, viene accolta la definizione tradizionale di rendimento, quella cioè che rapporta il prezzo del servizio del capitale al corrispondente prezzo di mercato del bene, si vedrà che anche per i capitali della terza categoria (quelli utilizzati ma non prodotti) esiste un tasso uniforme di rendimento pari al tasso dei capitali regolarmente accumulati: pertanto il tasso di rendimento appare unico per tutto il modello, con l'eccezione dei capitali sovrabbondanti che, potendo considerarsi beni liberi, non avranno rendimento.

Per i capitali utilizzati ma non prodotti, il costo di produzione corrente non può essere determinato dai dati tecnologici, dato che questi capitali sono esclusi dalla logica della produzione. Tali beni non sono tuttavia sottratti alla logica dello scambio: in quanto siano pienamente utilizzati, essi formeranno oggetto di valutazione nel mercato e non essendo beni liberi dovranno avere un prezzo positivo. Questo prezzo, sganciato dalle condizioni di produzione, sarà determinato in base alle condizioni di puro scambio. « Ma poiché i capitalisti che acquistano

beni capitali, tendono a realizzare il massimo profitto; grazie alla concorrenza che vige sul mercato, essi finiranno con l'eguagliare il rendimento di tutti i singoli beni capitali, sia che questi siano oggetto di produzione, sia che ne restino esclusi » (5).

In tal modo il rendimento, misurato come rapporto tra prezzo del servizio e prezzo del bene capitale corrispondente, si uguaglierà attraverso variazioni di mercato del prezzo del bene capitale.

È così dimostrata l'infondatezza della critica centrale di Zaghini al modello walrasiano.

La possibilità che i saggi di rendimento siano in un certo tempo, diversi, è generalmente accettata e viene ammessa anche da Walras; ma ben altro è il discorso quando si analizzano le condizioni di equilibrio che devono essere soddisfatte dalle variabili del modello. In tal caso, per tutti i beni, sia per quelli prodotti che per quelli solo utilizzati, il tasso di rendimento deve essere uniforme e deve risultare dal rapporto tra prezzo di mercato del capitale e prezzo del suo servizio.

Chi avesse meditato la dimostrazione di Morishima di esistenza di soluzioni economicamente significative nel modello walrasiano completo e avesse considerato con attenzione il sistema di condizioni di equilibrio esposto a p. 91 del suo *Equilibrium Stability and Growth*, avrebbe desunto da essa l'esistenza della categoria dei capitali utilizzati ma non prodotti e avrebbe constatato che unico è il saggio di rendimento, pari al tasso d'interesse.

Merito della precedente discussione è però di avere chiarito quale sia la logica che presiede alla determinazione dei prezzi di questa categoria di capitali.

5. Possiamo tuttavia chiederci se anche il prezzo dei servizi corrispondenti a questi capitali sia determinato dalle condizioni di scambio.

I servizi di questi fattori partecipano al processo produttivo, essendo anzi pienamente utilizzati: si potrebbe quindi pensare di derivare il prezzo di tali servizi dalle condizioni della produzione.

Si osservi però, che l'esistenza della categoria dei beni utilizzati ma non prodotti, richiede per la determinazione dell'equi-

(5) A. Graziani - B. Trezza, *op. cit.*, p. 246.

librio alcune modificazioni matematiche nel sistema di equazioni dei prezzi. Infatti questa categoria di capitali comporta la soppressione nel sistema dei prezzi, delle equazioni corrispondenti a tali beni, che vengono trasformate in disequazioni; mentre permangono le incognite relative al prezzo dei loro servizi in tutte le equazioni in cui essi appaiono come *inputs*.

La determinazione dei valori di queste incognite, in soprannumero rispetto alle equazioni, esigerà pertanto altri vincoli, che possono individuarsi nelle condizioni di scambio dei servizi di questi capitali.

Mentre le condizioni d'equilibrio possono essere soddisfatte come eguaglianze o come diseguaglianze, il sistema di relazioni che determinano i prezzi d'equilibrio, deve essere costituito solo da equazioni (6).

Saranno proprio le condizioni di scambio, che determinano quali capitali saranno prodotti e quali no e di conseguenza fissano quali condizioni di equilibrio devono essere soddisfatte come diseguaglianze, ad integrare il sistema di relazioni per calcolare le soluzioni.

Giustamente, sottolinea Zaghini, « il ruolo centrale in questo meccanismo è svolto dai capitalisti. Sono essi infatti che attribuendo ai beni capitali valori proporzionali ai prezzi dei servizi, prezzi dipendenti a loro volta dalle disponibilità date dei beni capitali stessi, fanno sì che qualsiasi sproporzione in tali disponibilità abbia la possibiltà di riflettersi immedatamente sulle decisioni di produzione e quindi d'investimento » (7).

In funzione delle condizioni che determinano i prezzi dei servizi dei capitali utilizzati ma non prodotti, si determina l'intero sistema dei prezzi e il saggio d'interesse. Un mutamento di valutazioni, cioè delle condizioni di scambio, si rifletterà infatti in una variazione del tasso d'interesse che, come vedremo, esprime le preferenze tra presente e futuro.

6. La domanda di beni capitali nel modello walrasiano, suole ripetersi, è una domanda indifferenziata. Il risparmio rap-

---

(6) Si considerino al riguardo gli esempi numerici di R. Dorfman - P. A. Samuelson - R. M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, McGraw Hill, London 1958, pp. 363-364.

(7) E. Zaghini, *op. cit.*, p. 46.

presenta una domanda generica di beni capitali, dato che non esistono tanti mercati quanti sono i singoli beni, ma esiste solo mercato dei beni capitali in cui si scambia la merce « reddito perpetuo » che viene introdotta da Walras in sostituzione dei singoli beni. Un'unità di tale merce rappresenta un reddito perpetuo unitario e il prezzo di un'unità di essa è dunque pari al reciproco del tasso d'interesse.

L'eterogenità dei beni capitali viene superata attribuendo ad ognuno di essi un prezzo proporzionale al valore del servizio, che rappresenta il reddito futuro di ogni periodo. Tale condizione è formalmente espressa imponendo la uguaglianza dei rendimenti su tutti i beni capitali.

Pertanto, le domande per i singoli capitali non avrebbero ragione di essere inserite nel modello e la loro introduzione non farebbe altro che renderlo sovradeterminato.

Questa è la ragione che spinge Zaghini a sostenere che la uguaglianza fra risparmio globale e nuovi investimenti, globalmente considerati, rappresenta una genuina condizione d'equilibrio.

Graziani ha però dimostrato che benché Walras non abbia fatto uso di funzioni di domanda per singoli beni capitali, esse sono implicite nel modello e la considerazione della loro esistenza non produce incoerenze logiche (8).

A tal fine espone il consueto procedimento di costruzione delle funzioni di domanda, per ricavarne le condizioni di equilibrio.

Al solito le funzioni di domanda sono derivate da un processo di massimizzazione della funzione d'utilità (nel caso, di un individuo tipico) subordinatamente al vincolo di bilancio. Le condizioni di massimo relativo, unite al vincolo di bilancio, sono presupposto per costruire le quantità domandate dei singoli capitali.

Però da tali condizioni di equilibrio si ricava pure la condizione di uguaglianza dei rendimenti per i singoli capitali. Pertanto le funzioni di domanda si rivelano alternative alle equa-

---

(8) Si veda A. Graziani, *Equilibrio generale ed equilibrio macro-economico*, ESI, Napoli 1965, pp. 33-38. Tale dimostrazione è stata ripresa da A. Graziani - B. Trezza, *op. cit.*, pp. 250-253. In una nota a p. 261 si sottolinea che tali funzioni non sono però differenziate tra loro.

zioni del terzo gruppo che impongono l'uniformità del tasso di rendimento (9).

Il procedimento di costruzione delle singole domande consente altresì una interpretazione più completa del modello di accumulazione con riferimento al significato economico del tasso d'interesse. Già si è detto che il saggio d'interesse è pari al saggio di rendimento uniforme su tutti i beni capitali. Ma in condizioni di equilibrio, il rapporto tra i prezzi di due beni qualsiasi deve essere uguale al rapporto tra le loro utilità. Dato che il saggio d'interesse esprime un rapporto tra prezzi, essendo pari al tasso di rendimento, deve pure possedere un significato in termini di rapporto di utilità.

Il procedimento di derivazione delle domande ci fornisce una risposta al riguardo: il tasso d'interesse non solo è pari al saggio di rendimento, ma anche al rapporto tra l'utilità marginale del reddito presente e l'utilità marginale del reddito futuro. Esso segnala pertanto le preferenze tra beni presenti e beni futuri.

7. L'avere esposto un processo di derivazione di funzioni di domanda per i singoli capitali, in apparente analogia a quanto accade per i beni di consumo, non deve farci perdere di vista la sostanza del problema.

La domanda dei beni capitali può essere definita come domanda di beni perfettamente succedanei, il cui rapporto di succedaneità è determinato dal rapporto inverso dei prezzi. In questo senso la domanda dei beni capitali può assimilarsi alla domanda di un bene composito a composizione variabile. Fisso è invece, in condizioni di equilibrio, il rapporto di succedaneità che scaturisce dalle condizioni della tecnica e dal sistema di preferenze. Questa situazione può essere facilmente descritta in termini di curve di indifferenza: avremo, nel caso di due beni, una famiglia di rette inclinate negativamente.

Se muta il sistema di preferenze, se cioè muta l'apprezzamento per il futuro, ciò si rifletterà in una variazione del sag-

(9) Si potrebbe tuttavia obiettare che mentre le funzioni di domanda implicano l'eguaglianza dei rendimenti, non è vero il contrario. Ciò a meno di integrare queste condizioni con quella che stabilisce che il tasso di rendimento sia pari al rapporto tra l'utilità marginale del reddito presente e l'utilità marginale del reddito futuro. La semplice uguaglianza dei rendimenti lascia completamente indefinita la funzione di utilità e pertanto non può individuare funzioni di domanda. Dimostreremo tuttavia che questa ulteriore condizione è implicita nel modello walrasiano.

gio d'interesse che misura il rapporto tra l'utilità marginale del reddito presente e del reddito futuro; taluni beni capitali potranno essere considerati liberi in relazione al grado relativo di abbondanza e muterà il sistema di prezzi che determina i rapporti di succedaneità. Avremo ancora una domanda di beni perfettamente succedanei, ma sarà mutata la famiglia delle superfici d'indifferenza. La funzione d'utilità determinerà quali beni dovranno essere prodotti e quali no: ciò non in base ad una scelta individuale dei beni, come avviene per i beni di consumo, dato che il capitalista è indifferente ai singoli capitali, ma in relazione al grado di scarsità o di abbondanza relativa delle risorse necessarie alla loro produzione.

In altri termini, la funzione d'utilità determinerà, tenuto conto della tecnica e delle risorse disponibili, quali condizioni d'equilibrio dovranno essere soddisfatte come uguaglianze e quali come diseguaglianze.

8. Una volta ammessa l'esistenza di domande per i capitali, nel senso precisato poc'anzi, il soddisfacimento delle condizioni d'equilibrio, rappresentate dall'uguaglianza dei tassi di rendimento, implica che siano in equilibrio i mercati dei singoli beni. Ma se ciò avviene, è automaticamente soddisfatta la legge di Walras che, nel modello d'accumulazione, afferma che il valore dei nuovi capitali prodotti è pari al risparmio. Pertanto non si può condividere l'affermazione di Zaghini che sostiene che tale relazione rappresenta una genuina condizione d'equilibrio.

Il modello di accumulazione puro non si compone tuttavia di soli tre gruppi di relazioni come, in definitiva, sembrano accettare anche Graziani-Trezza: il primo gruppo che pone la condizione che le risorse impiegate non possano superare le risorse iniziali; il secondo gruppo che impone che i costi di produzione siano maggiori o uguali ai prezzi di mercato dei beni; il terzo gruppo che impone l'uguaglianza di rendimento sui singoli capitali.

La considerazione di funzioni di domanda, alternative alle equazioni del terzo gruppo, comporta infatti l'accettazione di un'ulteriore condizione e cioè: il tasso di rendimento non solo deve essere uniforme per tutti i beni, ma deve altresì essere pari al rapporto tra l'utilità marginale del reddito presente e l'utilità marginale del reddito futuro. Questa condizione di equilibrio

non è palese ma è implicita nel modello d'accumulazione di Walras; infatti discende logicamente e necessariamente dalle assunzioni del modello. Essa è addirittura cruciale nel modello completo dove compaiono le domande dei beni di consumo. Tali domande comportano infatti il livellamento delle utilità marginali ponderate dei singoli beni; ma al fine di massimizzare l'utilità, bisognerà che anche l'utilità marginale ponderata del risparmio, investito nella merce reddito perpetuo, sia pari a tale livello.

Quest'ultima condizione significa che il rendimento dei beni capitali deve essere tale da far sì che l'utilità marginale ponderata del reddito futuro sia uguale all'utilità marginale ponderata dei beni di consumo, ciò che equivale a dire che il tasso di rendimento misura il rapporto tra l'utilità marginale del reddito presente e l'utilità marginale del reddito futuro.

Non basta quindi dire che il tasso di rendimento deve soddisfare i primi tre gruppi di equazioni del modello. Esso deve soddisfare anche questa ulteriore relazione. Riprenderemo il discorso discutendo del problema dell'unicità o della molteplicità delle soluzioni.

Limitando per ora la nostra attenzione ai primi due gruppi di relazioni del sistema, osserviamo quanto segue.

I primi due gruppi di condizioni possono interpretarsi come vincoli di due problemi duali di programmazione lineare: massimizzazione della produzione e minimizzazione dei costi, date le risorse iniziali.

Le successive condizioni, cioè l'uniformità del tasso di rendimento su tutti i capitali e la simultanea uguaglianza al rapporto tra l'utilità marginale del reddito presente e l'utilità marginale del reddito futuro, potrebbero essere sostituite da funzioni di domanda. Pertanto esse impongono delle restrizioni ai vettori dei prezzi dei beni e dei prezzi dei servizi corrispondenti che soddisfano i sistemi di relazioni dei due problemi duali di programmazione lineare. In altre parole, non tutte le soluzioni di tali sistemi sono compatibili con le funzioni di domanda.

Basandosi sulle proprietà della programmazione lineare e con l'ausilio del teorema del punto fisso di Katutani è tuttavia agevole dimostrare l'esistenza di soluzioni economicamente significative, in analogia alla brillante dimostrazione di Dorfman, Samuelson e Solow per il modello Walras-Cassel (10).

(10) Si veda R. Dorfman - P. A. Samuelson - R. M. Solow, *op. cit.*,

9. Finora abbiamo considerato l'esistenza di soluzioni economicamente significative in un modello d'accumulazione puro, ma anche il modello più complesso che comprende beni di consumo possiede sempre soluzioni economicamente significative, purché si ammetta che le condizioni di equilibrio possano essere soddisfatte come diseguaglianze.

Graziani-Trezza non sono però di questo avviso. Esponendo un modellino semplificato d'accumulazione che si apre a comprendere un bene di consumo, essi ritengono di poter dimostrare che in qualche caso si possono anche non avere soluzioni. Ma, a mio parere, la logica seguita non è corretta.

La loro esposizione intende dimostrare la possibilità di una incompatibilità della domanda del bene di consumo con gli intervalli determinati dalla frontiera delle possibilità produttive, qualunque sia l'alternativa del modello che viene realizzata e dunque quale che sia il sistema duale di prezzi che ne risulta. In termini grafici tale situazione si realizzerebbe se il valore della quantità domandata del bene di consumo c, cadesse sempre all'esterno dell'intervallo assegnato al consumo dalla definizione della frontiera produttiva. La conclusione di Graziani-Trezza che ciò può accadere, dipende da un'asserzione che si rivela cruciale.

Mentre a p. 260 del loro scritto (11), essi osservano correttamente che la derivata della domanda del bene di consumo rispetto al suo prezzo è negativa; a p. 261, pur in presenza di un prezzo superiore a quello di una precedente posizione d'equilibrio, essi affermano che la quantità domandata di tale bene risulterà probabilmente maggiore.

Ritengo che a tale conclusione siano stati indotti dalla riduzione del tasso d'interesse che, secondo Graziani-Trezza, dovrebbe agire positivamente sul consumo Ma qui sta l'errore: nel caso in esame, la riduzione del tasso d'interesse è un'assunzione
fondamento di un problema di statica comparata, cioè sorge
relazione al confronto di uno stato di equilibrio con un altro (12). Essendosi verificata una trasposizione, non è possibile

---

366-375. Ricordiamo anche il brillante approccio di Zaghini (vedi E. Zaghini, *op. cit.*, pp. 78-80).

(11) Vedi A. Graziani - B. Trezza, *op. cit.*, p. 260.

(12) Se il tasso d'interesse iniziale non fosse un tasso d'equilibrio tra risparmio e investimenti, la dimostrazione di Graziani-Trezza non sarebbe conclusiva. Seguendo una linea d'argomentazione più completa, Graziani-Trezza potrebbero dimostrare che in qualche caso, non può esistere equilibrio tra ri-

arguire da una riduzione del tasso d'interesse un aumento del consumo.

Qui è vero il contrario: la riduzione del tasso d'interesse esprime una minor preferenza per i beni presenti e quindi per il bene di consumo, a vantaggio dei beni futuri e quindi degli investimenti che risultano infatti aumentati.

Eliminando la svista, si potrebbe convertire il ragionamento di Graziani-Trezza in una dimostrazione per assurdo della necessità che il modello abbia soluzioni economicamente significative.

La prova del nove consiste in una dimostrazione diretta. Come tale può ben valere quella di Morishima. Ai fini dell'analisi dell'esistenza di soluzioni significative non è infatti rilevante la contrapposizione delle ipotesi su cui si fonda il modello di Morishima, rispetto alle assunzioni di Graziani-Trezza (13).

È vero che per Morishima le curve d'offerta dei servizi dei capitali partono sempre dall'origine degli assi, per cui incontrano sempre la curva di domanda per valori non negativi dei prezzi dei servizi; mentre per Graziani-Trezza l'offerta dei servizi è rigida e determinata dalle risorse disponibili. Ma la conseguenza delle assunzioni di rigidità dell'offerta dei fattori e della fissità dei coefficienti tecnici (14) è solo nel determinare possibili sovrabbondanze dei fattori, non assenza di soluzioni (15).

È chiaro che funzioni elastiche d'offerta dei fattori, che partono dall'origine degli assi, operano contro il verificarsi di disoc-

---

sparmio ed investimento al di fuori della condizione di risparmio nullo: ma ciò non implica che non esistano soluzioni al modello, se la funzione di domanda del bene di consumo c, è continua oltre che positiva per qualsiasi valore non negativo degli argomenti. Nella figura 2 dello scritto di Graziani-Trezza (p. 259) si avrebbe in questo caso la soluzione rappresentata dal punto A.

(13) L'assenza di un fattore primario indispensabile per la produzione di qualsiasi bene, renderebbe però necessario rafforzare l'assunzione 1 di Morishima, stabilendo che tutti i componenti di X siano strettamente positivi, al fine di evitare soluzioni banali. È questa un'ipotesi che è già stata accolta in altre dimostrazioni di esistenza di soluzioni in modelli d'equilibrio generale.

(14) Quest'ultima ipotesi è peraltro accolta anche da Morishima.

(15) Si veda R. Dorfman - P. A. Samuelson - R. M. Solow, *op. cit.*, p. 365. Le considerazioni relative al modello Walras-Cassel appaiono estensibili al modello completo. In effetti, dopo la stesura di questo saggio è apparso un nuovo volume di M. Morishima, *Theory of Economic Growth*, Clarendon Press, Oxford, 1969, che comprende nel cap. I una dimostrazione di esistenza di soluzioni d'equilibrio in un modello completo (*match-box size*) con offerta rigida dei fattori. Questa nuova dimostrazione ha il pregio di chiarire che in presenza di tecniche alternative, neppure il « ritorno delle tecniche » si oppone alla determinazione di soluzioni d'equilibrio.

cupazione dei fattori. Se la riduzione del prezzo di un fattore ne riduce l'offerta, la disoccupazione del fattore diviene volontaria e pertanto il fattore non risulta sovrabbondante. Per Morishima quindi, un fattore con prezzo zero è un fattore che non viene assolutamente domandato, non un fattore relativamente abbondante.

Per Graziani-Trezza viceversa, in qualche caso, la curva di domanda di un fattore potrebbe incontrare l'offerta solo nel quadrante negativo. Ma poiché il prezzo non può diventare negativo, quando il prezzo sarà zero, la domanda risulterà inferiore all'offerta e tale fattore risulterà relativamente sovrabbondante. Ciò però non contrasta affatto con la logica dell'equilibrio e con l'esistenza di soluzioni.

Contrariamente a quanto ritengono Graziani-Trezza, è possibile dimostrare che, indipendentemente dall'ipotesi che le curve dell'offerta dei servizi dei capitali partano dall'origine degli assi (assunzione 2 di Morishima), nella soluzione d'equilibrio, quando la domanda di un servizio è inferiore all'offerta il suo prezzo è zero, mentre quando il prezzo è positivo la domanda e l'offerta sono uguali. L'esposizione di Morishima è molto chiara al riguardo: l'assunzione 2 viene impiegata solo nella seconda metà di p. 90 del suo scritto, cioè dopo aver dimostrato che il prezzo del servizio di un fattore sarà zero, se la domanda di tale servizio è inferiore all'offerta. L'essenza della dimostrazione è fondata sulla non contradditorietà col vincolo di bilancio.

Pertanto l'ipotesi che le curve d'offerta dei servizi dei fattori partano dall'origine degli assi non è indispensabile in una dimostrazione di esistenza di soluzioni economicamente significative. L'averla introdotta, consente a Morishima di soddisfare tutte le condizioni d'equilibrio dei fattori come uguaglianze, dato che se il prezzo dei loro servizi scendesse a zero, la corrispondenza offerta svanirebbe (16).

Nel caso di rigidità dell'offerta dei servizi dei capitali, una o più condizioni d'equilibrio dei fattori potranno invece essere soddisfatte come diseguaglianze. Al limite il risparmio potrebbe essere nullo, ma non per questo l'insieme soluzione sarebbe vuo-

---

(16) Si vedano le condizioni d'equilibrio in M. Morishima, *Equilibrium Stability and Growth*, Clarendon Press, Oxford, 1964, p. 91.

to (17). Sarebbero infatti prodotti quei beni di consumo atti a soddisfare la domanda, nel rispetto dei vincoli di bilancio.

Ciò risulta logicamente in base alle assunzioni di Morishima (18), dalle quali viene esclusa l'ipotesi seconda.

10. La presunta incompatibilità creata dalla domanda del bene di consumo si fonderebbe sul fatto che in base al carattere peculiare del modello d'accumulazione puro, il saggio d'interesse sarebbe funzione univoca delle tecniche di produzione: cioè un fatto sostanzialmente tecnico che prescinde dalle scelte dei consumatori, che, se libere di manifestarsi, avrebbero l'effetto di porre all'equilibrio condizioni incompatibili.

In effetti, dato che il sistema dei prezzi è rappresentabile da un sistema di equazioni omogenee e la matrice dei coefficienti tecnici è non negativa (irriducibile), il teorema di Perron-Frobenius determina univocamente il saggio d'interesse, o meglio, il suo reciproco, e il vettore associato dei prezzi relativi, tutti non negativi (positivi). Pertanto il saggio d'interesse sarebbe identificato dalle caratteristiche della matrice dei coefficienti tecnici e sarebbe così sottratto alla scelta dei consumatori.

Contro tale tesi si può tuttavia osservare che basta assumere che esista almeno un servizio produttivo che non derivi da un capitale riproducibile (ad esempio è sufficiente introdurre nel modello il lavoro) per restituire il saggio d'interesse alle scelte di mercato (19).

Ma indipendentemente da ciò, l'ammettere che le condizioni d'equilibrio possano essere soddisfatte come diseguaglianze, « allargando la gamma dei possibili prezzi e saggi d'interesse d'equilibrio, rende certa l'esistenza di soluzioni e restituisce le scelte dei consumatori alla loro posizione naturale di centro della teoria del valore » (20).

---

(17) Si confronti con A. Gay, « Esistenza e caratteristiche dell'equilibrio in modelli di tipo walrasiano », in *Rivista di Politica Economica*, agosto-settembre 1967, p. 1221.

(18) Richiamiamo l'attenzione sull'assunzione 1 che può essere convenientemente rafforzata; e sottolineiamo l'importanza della nota 1 (p. 87) che sostiene la validità del teorema anche in condizioni particolari.

(19) Si consideri l'illuminante volume di J. Schwartz, *Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics*, Gordon and Breach, New York, 1961 e in particolare il contenuto delle lezioni 1, 2, 3, 13, 14. Si veda anche M. Morishima, *op. cit.*, pp. 55 e 69.

(20) Si veda A. Gay, *art. cit.*, p. 1233. Si noti che per avere la certezza dell'esistenza di soluzioni è necessario ammettere che il risparmio possa essere nullo.

Possiamo anche rilevare che già l'esistenza della categoria dei capitali pienamente utilizzati ma non prodotti assegna ampi spazi alle scelte di mercato nella determinazione del saggio d'interesse. Si è visto infatti che in funzione delle condizioni di scambio che determinano i prezzi dei servizi dei capitali utilizzati ma non prodotti, si determina l'intero sistema dei prezzi e il saggio d'interesse. Quest'ultimo varierà in modo inversamente proporzionale al variare del prezzo del servizio di ogni capitale utilizzato ma non prodotto, fermi restando i prezzi degli altri servizi di tale categoria di capitali. Non è però fuori luogo osservare che la considerazione della categoria dei capitali utilizzati ma non prodotti presuppone già che le condizioni d'equilibrio possano essere soddisfatte come diseguaglianze.

In definitiva l'incompatibilità originata dalla domanda dei beni di consumo non è tale da escludere soluzioni al modello. È piuttosto un'incompatibilità relativa, nel senso che, osserva Zaghini, le proporzioni in cui i beni di consumo sono richiesti dai consumatori possono essere diverse da quelle che sarebbero compatibili con il pieno impiego dei capitali, ove questo fosse tecnologicamente possibile.

11. Dimostrata l'esistenza di soluzioni economicamente significative, la discussione deve ora affrontare il problema dell'unicità o della molteplicità di tali soluzioni.

Benché taluni teorici dell'equilibrio economico generale, come il Kuenne, ritengano che l'unicità della soluzione sia una qualità non necessaria e persino indesiderabile dei modelli d'equilibrio (21), la gran parte degli studiosi attribuisce notevole rilevanza alla ricerca delle condizioni in base alle quali sia possibile aversi un'unica soluzione.

Purtroppo l'unicità può ottenersi solo imponendo condizioni particolarmente restrittive (22) e pertanto si dovrà ammettere che l'equilibrio economico generale possiede di solito molteplici soluzioni. Tuttavia, come sottolinea in un recente studio inedito il Debreu (23), « tali sistemi d'equazioni sembrano fornire sod-

(21) Si veda R. KUENNE, *The Theory of General Economic Equilibrium*, University Press, Princeton, 1963, p. 567.

(22) Sarebbe in corso di stampa una rassegna sull'analisi delle condizioni di unicità da parte di K. J. ARROW-HAHN, *General Competitive Analysis*, S. Francisco.

(23) G. DEBREU, *Economics With a Finite Set of Equilibria*, presentato al Convegno della Società di Econometria, Bruxelles, 1969, p. 1.

disfacenti spiegazioni d'equilibrio, come pure accettabili fondamenti per lo studio della stabilità, a condizione che tutti gli equilibri del sistema siano localmente unici ». Ciò equivale generalmente a ricercare le condizioni in base alle quali un sistema possiede un numero finito di soluzioni.

È chiaro che una discussione sul modello di accumulazione del tipo di quella effettuata da Debreu per il modello di scambio, è al di fuori dei limiti della presente ricerca. Più modestamente possiamo però sgombrare il terreno da alcuni equivoci che sono affiorati nella recente letteratura italiana.

Un conto è dire che un sistema è determinato e un altro dire che la sua soluzione è unica. In altri termini, il problema della unicità della soluzione è a valle del problema della determinazione. Un sistema può essere determinato e la sua soluzione non essere unica.

Il modello d'accumulazione è generalmente determinato (24) anche se la sua soluzione non è necessariamente unica, anzi di norma molteplice. La molteplicità delle soluzioni non è però prodotta solo dal fatto che il modello costituito dai primi tre gruppi di relazioni è compatibile con diversi tassi d'interesse noi infatti ne scegliamo uno in base alla condizione addizionale che afferma che il saggio di rendimento deve essere pari al rapporto tra utilità marginale del reddito presente e utilità marginale del reddito futuro, valida l'ipotesi di una funzione di utilità per un individuo tipico: questa assunzione simile a quella di Wald, benché assai discutibile, semplifica notevolmente il problema.

La molteplicità delle soluzioni può sorgere per noi in corrispondenza ad ognuno dei possibili tassi d'interesse, nel senso che nulla ci assicura che a un dato tasso d'interesse cui è associato un vettore di prezzi relativi, corrisponda un'unica soluzione in termini di quantità prodotte di beni capitali e di risorse pienamente utilizzate.

In effetti, date le ipotesi su cui si regge l'accumulazione nel modello walrasiano, non può affermarsi che la domanda dei singoli beni capitali sia univoca rispetto a un dato vettore di prezzi. In condizioni di equilibrio, il risparmiatore è indifferente all'acquisto dell'uno o dell'altro bene capitale nelle proporzioni fissate

(24) Naturalmente, come sempre nei modelli d'equilibrio generale, il sistema determina i prezzi relativi dei beni e servizi e non i valori assoluti.

dai prezzi relativi. Pertanto, per quanto riguarda le quantità d'equilibrio dei singoli capitali, l'unicità o la molteplicità delle soluzioni dipenderà dalle condizioni della produzione, tenuto conto del vettore dei prezzi d'equilibrio.

Se il vettore dei prezzi relativi, che soddisfa le condizioni del modello, è tangente in un solo punto della frontiera delle possibilità produttive, la soluzione sarà unica. Viceversa se la tangenza definisce un segmento o una superficie di tale frontiera, la soluzione sarà molteplice. In un modello di mera accumulazione, in corrispondenza a un dato tasso d'interesse, inoltre, potrebbero darsi uno o più vettori di prezzi.

Come è noto il teorema di Perron-Frobenius assicura una soluzione positiva unica di $1/r$ e del vettore associato dei prezzi relativi dei servizi, al sistema originario (completo) dei prezzi e a qualsiasi sottosistema che si ottiene da esso, cancellando una o più righe e le colonne che hanno in comune l'elemento b_{ii} con le righe cancellate. In tal caso, a un dato tasso d'interesse d'equilibrio corrisponde un solo vettore di prezzi.

Se però il sistema completo e quelli derivati sono trasformati in modelli aperti, attraverso l'introduzione del lavoro, il cui prezzo è scelto come *numeraire*, in ognuno di essi i prezzi dei capitali risulteranno funzione crescente del tasso d'interesse compreso tra zero e r_{max}, r_{max} essendo ricavato ponendo uguale a zero il prezzo unitario del lavoro (25).

Diviene allora possibile stabilire una corrispondenza tra un dato tasso di interesse e molteplici vettori di prezzi, in relazione ai diversi sottosistemi che si considerano (26). Non sempre però vi sarà tale molteplicità di soluzioni, tenuto conto dei campi di variazione di r nei diversi sottosistemi e delle possibili incompatibilità dei vettori dei prezzi con i corrispondenti gruppi di equazioni di domanda e offerta fisica dei servizi delle risorse disponibili.

---

(25) Si veda J. Schwartz, *op. cit.*, p. 34. Il modello dello Schwartz è del tipo Leontief dinamico, ma i teoremi esposti sono facilmente adattabili alla nostra analisi.

(26) Tale situazione non va confusa con quella originata dall'esistenza di più tecniche produttive. In quest'ultimo caso, infatti, nei punti di intersezione che individuano il passaggio dall'uno all'altro metodo produttivo, a un dato tasso d'interesse corrisponde un unico vettore di prezzi. Al di fuori dei punti di intersezione che identificano posizioni di indifferenza circa l'adozione di tecniche diverse, la molteplicità dei vettori di prezzi in corrispondenza a ogni tasso di interesse non è rilevante ai fini dell'equilibrio.

In conclusione, solo imponendo condizioni restrittive, potrà essere assicurata l'unicità della soluzione sia in termini di tasso d'interesse, che di prezzi dei servizi e di quantità prodotte beni capitali. Di norma però le soluzioni saranno molteplici anche se il modello si presenta globalmente determinato.

12. Vi è un ultimo punto da chiarire. L'equilibrio walrasiano è senza dubbio un equilibrio puramente uniperiodale.

I valori delle incognite, tra cui il prezzo dei beni capitali e dei relativi servizi, come pure le quantità prodotte dei nuovi beni capitali, dipendono dalle risorse iniziali, oltre che dalla tecnologia e dalle preferenze. In ogni periodo muta la dotazione delle risorse iniziali, in seguito all'accrescersi o al decadere dello stock del capitale e così pure possono mutare tecnologia e preferenze. In ogni periodo vi sarà pertanto un equilibrio diverso. Su di esso il passato incide solo nel senso che l'ammontare risorse produttive disponibili nel corso di ogni periodo dipende dalle quantità di beni capitali fabbricati nei periodi precedenti il futuro è praticamente ininfluente sulla soluzione, in quanto, data la struttura del modello, è necessario supporre che i prezzi attesi siano identici a quelli correnti (27).

Nel modello di Walras il tempo è così presente solo formalmente. È quindi evidente che l'analisi dell'equilibrio generale può solo determinare differenti posizioni d'equilibrio, corrispondenti a diverse condizioni iniziali, ma nulla può dire circa la dinamica delle variabili a meno di introdurre specifiche ipotesi di comportamento fuori equilibrio, ove il tempo compaia in modo essenziale.

Se ci limitiamo a considerare posizioni d'equilibrio statico, possiamo parlare di stabilità in senso formale, cioè verificare che le curve di domanda e offerta si intersechino nel giusto modo, il che equivale a riscontrare che piccoli allontanamenti casuali dalla posizione d'equilibrio producano reazioni che tendono ristabilire lo stato di partenza. Al riguardo rammentiamo l'analisi dello Hicks di *Value and Capital* che può estendersi al modello completo in modo da comprendere il mercato dei capitali, e le critiche del Samuelson al concetto hicksiano di stabilità.

---

(27) Una versione più accettabile configura le attese dei prezzi come distribuzioni probabilistiche aventi come media i prezzi attuali. Si veda G. Hicks, *Value and Capital*, University Press, Oxford, 1961, p. 133.

Ben altro tipo di problema è invece « verificare che l'equilibrio abbia la proprietà di persistere nel tempo. Ciò sarebbe vero per uno stato stazionario, posto che non mutino le condizioni iniziali. Ma una posizione d'equilibrio che contenga accumulazione di capitale, consumo di risorse, ecc. è in continuo mutamento dall'interno, mentre eventi casuali possono apportare variazioni dall'esterno » (28). Si tratta allora di affrontare il problema dell'evoluzione del modello seguendo lo sviluppo periodale mentre si modificano le disponibilità dei fattori. È a questo punto che affiorano le maggiori difficoltà e si pone la necessità di introdurre nuovi concetti. Bisogna infatti ricercare un equilibrio che non sia puramente formale, cioè che soddisfi solamente la condizione di compatibilità di domanda e offerta su tutti i mercati; è importante che l'equilibrio dinamico comporti la piena occupazione di tutti i fattori. Solo in questo caso ha senso infatti parlare di un equilibrio temporale.

Dato però che l'occupazione di tutti i fattori può rivelarsi tecnologicamente impossibile, ciò che importa è l'individuazione di una tendenza dell'equilibrio del modello verso situazioni di pieno impiego delle risorse.

Il concetto di stabilità va dunque riformulato in modo da designare la tendenza del sistema a seguire un sentiero di piena occupazione, aumentando solo quei capitali che rappresentano strozzature a uno sviluppo senza intoppi e frenando la produzione dei capitali sovrabbondanti.

Questo è un filone di ricerca che rivela sostanziali connessioni con il modello dinamico di Leontief e le ricerche di Dorfman, Samuelson e Solow sui sentieri d'accumulazione del capitale.

È un terreno che è stato mirabilmente esplorato da Zaghini con un saggio lucido e penetrante (29). Zaghini mostra che attraverso un modello d'accumulazione walrasiano, considerato nella sua evoluzione temporale, può essere spiegata la teoria generale implicita nel modello dinamico chiuso di Leontief. Così facendo dimostra che il sentiero temporale dell'accumulazione walrasiana è compatibile con un equilibrio di pieno impiego di tutti gli stocks, se tale equilibrio è tecnologicamente possibile;

(28) J. Robinson, *Essays in the Theory of Economic Growth*, Mac Millan, London, 1962, p. 6.

(29) Si veda E. Zaghini, *Generalizzazione alternativa del modello dinamico di Leontief e critica del paradosso della stabilità duale*, pp. 63-94.

mentre rivela una tendenza verso il pieno impiego, se questo non è tecnologicamente possibile.

Tutti i problemi dell'equilibrio walrasiano sembrerebbero dunque soddisfacentemente risolti. La dimostrazione di Zaghini non mi pare tuttavia decisiva per diversi ordini di motivi.

In primo luogo la dimostrazione di esistenza di soluzioni non ne garantisce l'unicità: il sistema potrebbe quindi seguire un sentiero temporale diverso da quello di piena occupazione, pur essendo quest'ultimo tecnologicamente accessibile.

In secondo luogo, quando non sia tecnologicamente possibile il pieno impiego, il sentiero temporale potrebbe essere oscillante attorno alla zona di pieno impiego. Zaghini ammette l'eventualità, ma ritiene che attraverso la scelta di un'opportuna dimensione del periodo, sia possibile garantire l'immediata convergenza verso il pieno impiego. A noi sembra però che Zaghini faccia uso di un artificio matematico che potrebbe essere incompatibile con i vincoli della tecnologia.

Infine la dimostrazione di Zaghini fa riferimento a un modello d'accumulazione e non a un modello aperto in cui compaia una domanda finale di beni di consumo. Ma proprio le scelte dei consumatori possono contribuire in modo rilevante a rendere tecnologicamente impossibile il pieno impiego e pertanto a determinare equilibri solo temporanei. La tendenza al pieno impiego dei capitali potrebbe infatti essere contrastata dall'evoluzione temporale delle scelte dei consumatori. L'esistenza di un equilibrio dinamico richiede condizioni molto restrittive (30).

Ci sembra comunque poter pervenire a una conclusione che sottolinea la coerenza logica del modello walrasiano relativamente all'equilibrio statico, ma anche, limitando il discorso al modello d'accumulazione, la sua fecondità euristica nell'interpretazione della dinamica del capitale.

---

(30) M. Morishima nel suo nuovo volume, *Theory of Economic Growth*, cit., ha accuratamente definito le condizioni di stabilità dell'equilibrio dinamico walrasiano nei capp. III e V. Mentre nel caso di modelli a due settori con un unico bene capitale si individuano agevolmente talune condizioni di stabilità (p. 57), che determinano uno sviluppo bilanciato secondo un sentiero di *silvery equilibrium*; nel caso di modelli con molti beni capitali, le forze destabilizzanti si manifestano pienamente (p. 67) per cui i criteri di stabilità (particolarmente restrittivi) possono differire da modello a modello.

È questa una sconsolante conclusione che maschera la sostanziale instabilità del modello walrasiano quando da un'analisi uniperiodale si passi ad un'analisi di lungo periodo. Nulla esclude, tuttavia, che si possa riaprire il discorso circa il significato e i limiti del concetto di stabilità in un'analisi più realistica dello sviluppo.