6. Avversione al rischio e rigidità nominali

di Gerd Weinrich

1. Introduzione

La rigidità dei prezzi nominali è un fenomeno che attira l'attenzione degli economisti almeno dai tempi di Keynes, tant'è vero che una politica economica keynesiana – che mira a influenzare il livello di *output* prodotto e l'occupazione tramite una variazione della domanda aggregata nominale – non può essere efficace se non esiste alcuna rigidità dei prezzi nominali. Che tali rigidità esistano è stato dimostrato da numerosi studi empirici [1]. D'altra parte, sulla spiegazione della loro origine, le teorie sono numerose e discordanti. Le rigidità dei prezzi sembrano contraddire la razionalità degli agenti economici. Di conseguenza si trovano nella letteratura contributi che le ascrivono alla presenza di comportamenti non perfettamente massimizzanti (*near rationality*), ma anche alla presenza di costi legati al processo di aggiustamento (*menu costs*), di informazione imperfetta o asimmetrica, di interazioni strategiche fra oligopolisti e di certe caratteristiche della funzione di produzione e della funzione di domanda.

Rimane tuttavia la sensazione che manchi qualcosa di importante nell'elenco soprariportato – un'ipotesi forte generalmente accettabile attorno alla quale sia possibile costruire un quadro di riferimento unitario. Lo scopo del presente lavoro è quello di presentare l'avversione al rischio da parte delle imprese come candidato ad un tale ruolo.

Nella teoria economica l'ipotesi che l'impresa sia avversa al rischio è finora stata trascurata. Questo probabilmente perché, in presenza di mercati finanziari perfetti, le imprese dovrebbero essere in grado di proteggersi bene dal rischio, e perciò dovrebbero essere neutrali al rischio. In realtà i mercati finanziari non sono perfetti, ma anche se lo fossero, il fatto che spesso le imprese siano gestite da manager che

[1] Si vedano al riguardo ad esempio Carlton [1986] e Mankiw e Romer [1991, Introduzione].

sono avversi al rischio e pagati in base alla performance dell'impresa fa sì che le imprese si comportino come se fossero avverse al rischio.

D'altro canto, una volta accettata la possibilità che almeno alcune imprese siano avverse al rischio, è assai immediato spiegarsi, al livello intuitivo, la vischiosità nominale dei prezzi. Di solito un'impresa sa piuttosto bene qual è la quantità che può vendere al suo prezzo attuale ovvero di *status quo* – questo perché ha effettivamente sperimentato ed osservato la quantità che viene domandata a tale prezzo. Se invece vuole cambiare il prezzo del suo *output*, la situazione è assai diversa. L'impresa nella normalità dei casi non conosce con precisione la curva di domanda per il suo prodotto. Perciò, per un qualunque prezzo nuovo, l'incertezza da parte dell'impresa sulla relativa quantità domandata è maggiore di quanto non lo sia al prezzo di *status quo*. Non solo, ma più l'impresa s'allontana dal prezzo attuale, maggiore è la sua incertezza. Ora, se l'impresa è avversa al rischio, l'incertezza è una cosa non gradita, anzi da evitare, e perciò la voglia di spostarsi dal prezzo attuale sarà ridotta per un'impresa avversa al rischio in confronto ad un'impresa che è neutrale al rischio.

Oltre a ciò, e questo è meno immediato, può essere ottimale per un'impresa avversa al rischio non cambiare per niente il suo prezzo anche se fosse ottimale cambiarlo qualora l'impresa fosse neutrale al rischio. Un prezzo di *status quo* che possieda questa proprietà verrà nel seguito indicato come *prezzo fisso endogeno*. L'esistenza di tali prezzi dipende dalle proprietà di continuità imposte alle distribuzioni di probabilità soggettive dell'impresa riguardanti le possibili quantità domandate per un dato prezzo. Come si vedrà, il concetto di convergenza debole, tradizionalmente utilizzato nella teoria delle decisioni in circostanza di incertezza, ammette prezzi fissi endogeni mentre la convergenza chiusa, concetto che si riferisce alla convergenza dei supporti delle distribuzioni coinvolte, li esclude.

Una seconda ragione che spiega l'emergere di prezzi fissi endogeni è legata al comportamento della varianza della quantità domandata, vista come variabile aleatoria da parte dell'impresa, in dipendenza del prezzo. Esistono prezzi fissi endogeni se, e solo se, tale funzione di varianza presenta uno spigolo in corrispondenza al prezzo di *status quo*.

Nella letteratura si trovano ben pochi lavori sulla rigidità dei prezzi dovuta all'avversione al rischio. Sicuramente degni di essere menzionati sono quelli di Drèze [1979] e di Greenwald e Stiglitz [1989].

Il resto dell'articolo è organizzato come segue. Nel paragrafo 2 viene presentato il modello e si dimostrano alcuni risultati preliminari; nel paragrafo 3 vengono individuate alcune condizioni che assicurano l'esistenza di prezzi fissi endogeni; nel paragrafo 4 si analizza il caso in

cui non esistono prezzi fissi endogeni. Stabiliremo che anche in questi ultimo caso l'avversione al rischio è rilevante poiché la velocità di aggiustamento del prezzo decresce al crescere dell'avversione al rischio. L'ultimo paragrafo contiene alcune riflessioni conclusive.

2. Il modello

Consideriamo un'impresa che è incerta per quanto riguarda la relazione tra il prezzo del proprio prodotto e la quantità domandata. Conosce con certezza il solo punto di *status quo*, ovvero il valore della relazione al prezzo attuale, $p_0 \mapsto y_0$. Per valori del prezzo p diversi da p_0 l'impresa ha delle congetture soggettive sulle quantità che può vendere; esse sono formalmente rappresentate da distribuzioni di probabilità $\mu(p|p_0) \in \Delta(\mathbb{R}_+)$, ove $\Delta(\mathbb{R}_+)$ indica l'insieme delle misure di probabilità sull'insieme dei numeri reali non negativi. Indichiamo con $\bar{y}(p|p_0)$ il valore atteso della variabile aleatoria avente distribuzione $\mu(p|p_0)$ e con $\delta(y) \in \Delta(\mathbb{R}_+)$ la misura di probabilità degenerata, concentrata in y. Assumiamo inoltre:

[A1] $\mu(p|p_0)([y_0, \infty[) = 1$ se $p < p_0$, $\mu(p|p_0)([0, y_0]) = 1$ se $p > p_0$ e $\mu(p_0|p_0) = \delta(y_0)$.

[A2] $\bar{y}(p|p_0)$ è derivabile con derivata continua in p per ogni $p > 0$ e $p_0 > 0$.

[A3] Esiste un numero $n \in \mathbb{N}$ tale che per tutte le p e p_0 la distribuzione di probabilità $\mu(p|p_0)$ è della forma $\mu(p|p_0) = [(y_1(p|p_0), q_1(p|p_0)), \ldots, (y_n(p|p_0), q_n(p|p_0))]$

dove $y_i(\cdot|p_0)$ sono funzioni derivabili e $q_i(\cdot|p_0)$ sono funzioni non negative, continue, derivabili per $p \neq p_0$ e tali che $\Sigma_i q_i(p|p_0) = 1$ per ogni p e p_0. Esistono inoltre

$$\lim_{p \to p_0^-} q_i'(p|p_0) =: q_i'^-(p_0) \text{ e } \lim_{p \to p_0^+} q_i'(p|p_0) =: q_i'^+(p_0).$$

La [A1] implica che l'impresa escluda che la quantità domandata sia una funzione crescente del prezzo. La [A2] è una proprietà di regolarità delle aspettative. La [A3] impone che il supporto di $\mu(p|p_0)$ sia finito; essa serve a semplificare l'analisi tecnica. $q_i(p|p_0)$ è la probabilità che l'impresa associa all'evento che la quantità domandata sia $y_i(p|p_0)$. Siccome nella maggior parte di quello che segue p_0 sarà te-

nuto fisso, scriveremo $\bar{y}(p)=\bar{y}(p|p_0)$, $y_i(p)=y_i(p|p_0)$ e $q_i(p)=q_i(p|p_0)$ ogniqualvolta questo sia possibile senza causare confusione.

Una conseguenza immediata della continuità delle funzioni $y_i(\cdot)$ e $q_i(\cdot)$ ipotizzata con la [A3] è che, se $p_n \to p$, allora anche $\Sigma_i f(y_i(p_n))$ $q_i(p_n) \to \Sigma_i f(y_i(p))q_i(p)$, per ogni funzione $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continua. Ma questo non vuol dire altro che la funzione $p \mapsto \mu(p|p_0)$ è continua nel senso della cosiddetta convergenza debole, concetto standard questo nella teoria delle decisioni in circostanza di incertezza.

Un'altra implicazione ovvia delle suddette ipotesi è che per ogni $i \in \{1, ..., n\} =: I$ tale che $y_i(p_0) \neq y_0$, $q_i(p_0)=0$. Infatti, se $y_i(p_0) \neq y_0$ e se $q_i(p_0)$ fosse diverso da zero, $\mu(p_0|p_0)$ non sarebbe uguale a $\delta(y_0)$, in contraddizione con la [A1]. Di conseguenza, ponendo $J=\{i \in I | y_i(p_0)=y_0\}$, segue $\Sigma_{i \in J} q_i(p_0)=1$. La figura 6.1 illustra una possibile situazione con $I=\{1, 2, 3\}$ e $J=\{2\}$.

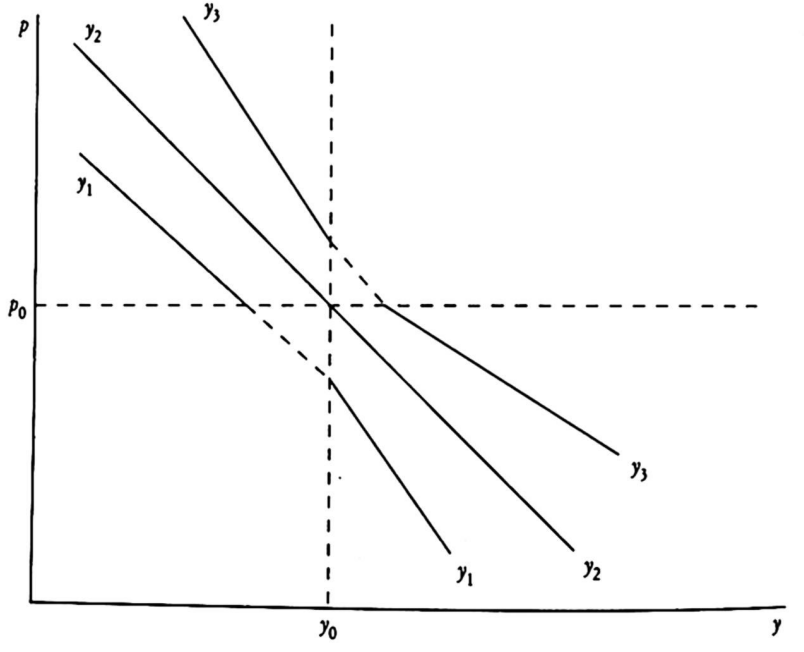

FIG. 6.1

Per quanto riguarda la tecnologia dell'impresa ipotizziamo costi fissi uguali a zero e costi marginali costanti uguali a $c>0$. Di conseguenza, se (p, y) è una coppia prezzo-quantità, il profitto associato è $\pi=(p-c)y$. Scriviamo anche $\bar{\pi}(p)=(p-c)\bar{y}(p)$ per il profitto atteso in

dipendenza di p. Useremo inoltre le notazioni $\pi_0=(p_0-c)y_0$ e $\pi_i=(p_0-c)y_i(p_0)$.

Sia $V(\pi)$ la funzione di utilità del profitto dell'impresa. Assumiamo che sia crescente e sviluppabile in serie di Taylor. V dà luogo alla funzione di utilità attesa

$$U(p|p_0)=\Sigma_{i\in I}V((p-c)y_i(p))q_i(p).$$

Siccome V è derivabile, la [A3] implica che anche $U(\cdot|p_0)$ sia derivabile, ma solo se $p\neq p_0$. In tal caso

$$U'(p|p_0)=\Sigma_i\{V'((p-c)y_i(p))[y_i(p)+(p-c)y_i'(p)]q_i(p)+ \\ +V((p-c)y_i(p))q_i'(p)\}$$

Invece per $p\mapsto p_0^-$ e $p\mapsto p_0^+$ la [A3] assicura l'esistenza dei limiti $U'^-(p_0):=lim_{p\to p_0^-}U'(p|p_0)$ e $U'^+(p_0):=lim_{p\to p_0^+}U'(p|p_0)$. Se $U'^-(p_0)\neq U'^+(p_0)$, la funzione di utilità attesa avrà uno spigolo nel punto $p=p_0$. Come si può facilmente intuire e si vedrà comunque nel seguito, questo sarà decisivo per l'esistenza di prezzi fissi. È di fondamentale importanza il seguente risultato dovuto a Weinrich e Battinelli [1992] la cui dimostrazione riportiamo per completezza nell'appendice:

lemma 1: $U'^-(p_0)=\dfrac{d}{dp}[V(\bar\pi(p))]_{p=p_0}+A^-$, con

$$A^-=\sum_{i\notin J}\left[\sum_{n=2}^{\infty}V^{(n)}(\pi_0)\frac{(\pi_i-\pi_0)^n}{n!}\right]q_i'^-(p_0);$$

$$U'^+(p_0)=\frac{d}{dp}[V(\bar\pi(p))]_{p=p_0}+A^+, \text{ con}$$

$$A^+=\sum_{i\notin J}\left[\sum_{n=2}^{\infty}V^{(n)}(\pi_0)\frac{(\pi_i-\pi_0)^n}{n!}\right]q_i'^+(p_0).$$

Nel suddetto lemma $V(\bar\pi(p))$ è l'utilità dell'impresa nel caso in cui il profitto realizzato è uguale al suo valore atteso. Tale utilità coincide con l'utilità attesa se l'impresa è neutrale al rischio. Il *lemma 1* stabilisce che la sua derivata differisce da $U'^-(p_0)$ se, e solo se, il termine A^- è diverso da zero. Per quanto riguarda il segno di A^-, sappiamo che $q_i(p_0)=0$ per $i\notin J$ e perciò $q_i'^-(p_0)\leq 0$. D'altro canto

$\sum_{n=2}^{\infty} V^{(n)}(\pi_0)(\pi_i - \pi_0)^n/n! \leq 0$ se e solo se V è concava. In tal caso, di conseguenza, $A^- \geq 0$. Esso è positivo in senso stretto se e solo se V è concava in senso stretto e $q_i'^-(p_0) < 0$ per almeno un $i \notin J$. Un ragionamento simmetrico vale per A^+. Abbiamo pertanto ottenuto:

proposizione 1: $U'^-(p_0) \geq \frac{d}{dp}[V(\bar{\pi}(p))]_{p=p_0} \geq U'^+(p_0)$.

Le disuguaglianze sono strette se e solo se V è concava in senso stretto e, rispettivamente, $q_i'^-(p_0) < 0$ per almeno un $i \notin J$ e $q_i'^+(p_0) > 0$ per almeno un $i \notin J$.

Per un'interpretazione di questi risultati si consideri la figura 6.2.

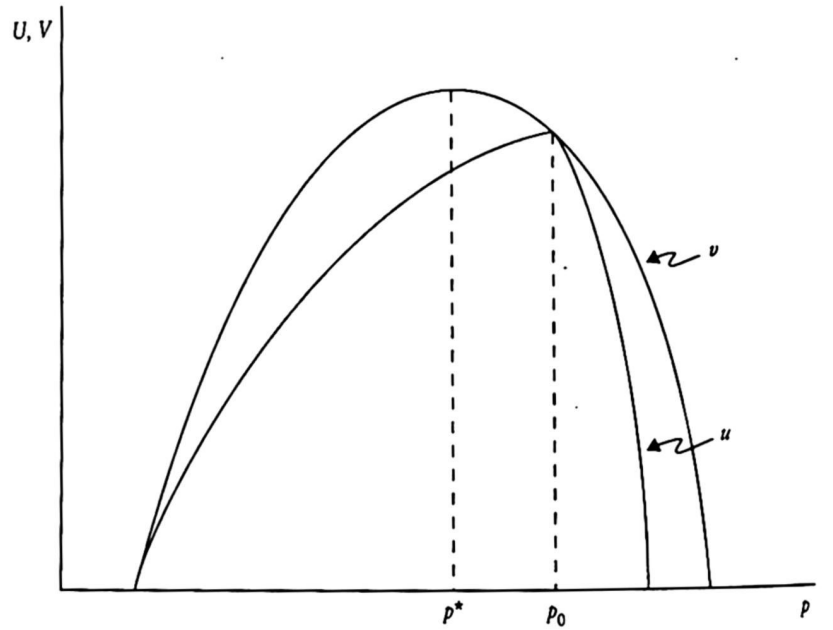

FIG. 6.2

Lì sono riportate le funzioni $p \mapsto V(\bar{\pi}(p))$ e $p \mapsto U(p|p_0)$. Siccome per $p = p_0$ non c'è incertezza, le due funzioni coincidono in corrispondenza a tale valore. $V(\bar{\pi}(\cdot))$ è derivabile ovunque, ma quando le disuguaglianze della *proposizione 1* valgono in senso stretto, allora $U(\cdot|p_0)$ ha uno spigolo in $p = p_0$. Si noti che lo spigolo non può essere escluso per il fatto che le distribuzioni soggettive di probabilità dell'impresa siano

debolmente continue. Inoltre, se l'impresa è neutrale al rischio, tutte le derivate della funzione V a partire da quella di secondo ordine sono nulle e perciò anche A^- e A^+ sono ambedue zero. In tal caso la funzione $U(\cdot|p_0)$ non possiede alcuno spigolo e inoltre coincide con la funzione $V(\bar{\pi}(\cdot))$.

Nei risultati finora riportati è decisivo che le grandezze $q_i'^-(p_0)$ e $q_i'^+(p_0)$ siano diverse da zero. Per comprendere meglio che cosa vuol dire questo studiamo alcuni esempi.

Esempio 1. Siano $y_1(p) \equiv 0$, $y_2(p) \equiv y_0$, $y_3(p) \equiv y_0 + p_0$, e

$$q_1 = \begin{cases} 0 & \text{se } p \le p_0 \\ (p - p_0)/y_0 & \text{se } p \ge p_0 \end{cases} \Rightarrow q_1' = \begin{cases} 0 & \text{se } p < p_0 \\ 1/y_0 & \text{se } p > p_0 \end{cases}$$

$$q_2 = \begin{cases} p/p_0 & \text{se } p \le p_0 \\ 1 - (p - p_0)/y_0 & \text{se } p \ge p_0 \end{cases} \Rightarrow q_2' = \begin{cases} 1/p_0 & \text{se } p < p_0 \\ -1/y_0 & \text{se } p > p_0 \end{cases}$$

$$q_3 = \begin{cases} 1 - p/p_0 & \text{se } p \le p_0 \\ 0 & \text{se } p \ge p_0 \end{cases} \Rightarrow q_3' = \begin{cases} -1/p_0 & \text{se } p < p_0 \\ 0 & \text{se } p > p_0 \end{cases}$$

È facile verificare che queste funzioni soddisfano le [A1]-[A3]. In particolare $\bar{y}(p) = y_0 + p_0 - p$. Le funzioni $y_i(\cdot)$ e $\bar{y}(\cdot)$ sono rappresentate nella figura 6.3. Si vede che $J = \{2\}$ e si calcola $q_1'^-(p_0) = 0$, $q_3'^-(p_0) = -1/p_0$, $q_1'^+(p_0) = 1/y_0$ e $q_1'^+(p_0) = 0$.

Pertanto

$$A^- = \left[\sum_{n=2}^{\infty} V^{(n)}(\pi_0) \frac{(\pi_3 - \pi_0)^n}{n!} \right] \left(-\frac{1}{p_0} \right) \ge 0$$

$$A^+ = \left[\sum_{n=2}^{\infty} V^{(n)}(\pi_0) \frac{(\pi_1 - \pi_0)^n}{n!} \right] \left(-\frac{1}{y_0} \right) \le 0.$$

$A^- > 0$ e $A^+ < 0$ se e solo se V è concava in senso stretto.

Esempio 2: Supponiamo che $y_i(p)$, $i = 1,2,3$, siano le stesse funzioni dell'*esempio 1*, ma aggiungiamo $y_4(p) = \bar{y}(p) = y_0 + p_0 - p$. Usiamo caratteri corsivi $\mathcal{q}$, $\mathcal{A}^-$ and $\mathcal{A}^+$ per distinguere le variabili dell'esempio cor-

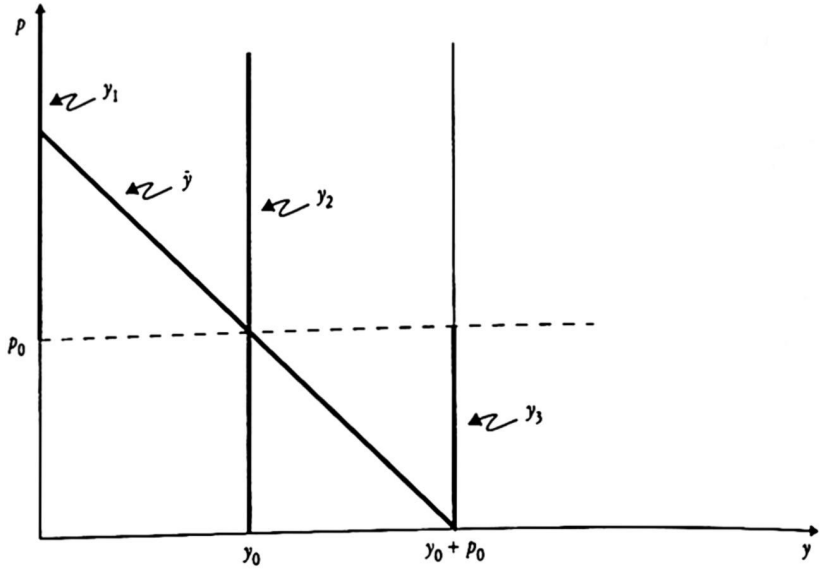

FIG. 6.3

rente da quelle dell'esempio precedente. Supponendo che $q_4 \equiv q \in [0,1]$, otteniamo $q_i(p) = q_i(p)(1-q)$, $i = 1,2,3$. Di conseguenza $q_i'(p) = q_i'(p)(1-q)$ per $i = 1,2,3$ e $q_4' = 0$. Questo implica $\mathcal{A}^- = \mathcal{A}^-(1-q)$ e $\mathcal{A}^+ = A^+(1-q)$, e di nuovo l'avversione al rischio conduce all'esistenza d'uno spigolo nel punto $p = p_0$.

Esempio 3: L'unica variazione rispetto all'*esempio* 2 è che adesso ammettiamo che $q_4 = q$ sia una funzione di p, $q(p)$. Se $q(\cdot)$ è derivabile, allora

$$q_1' = \begin{cases} 0 & \text{se } p < p_0 \\ (1/y_0)[1-q(p)] - (p-p_0)q'(p)/y_0 & \text{se } p > p_0 \end{cases}$$

$$q_3' = \begin{cases} -(1/p_0)[1-q(p)] - (1-p/p_0)q'(p) & \text{se } p < p_0 \\ 0 & \text{se } p > p_0 \end{cases}$$

Segue che $q_3'^-(p_0) = -(1/p_0)\ [1-q(p_0)]$ e $q_1'^+(p_0) = (1/y_0)[1-q(p_0)]$. Affinché queste grandezze si annullino è necessario e sufficiente che $q(p_0) = 1$. È solo in tal caso che la funzione di utilità non possiede alcuno spigolo.

3. Prezzi fissi endogeni

Discutiamo adesso la rilevanza dei suddetti risultati per l'esistenza di prezzi fissi. Nelle ipotesi della *proposizione 1* la funzione di utilità attesa $U(\cdot|p_0)$ ha uno spigolo nel punto $p=p_0$. Questo vale in particolare quando p_0 è uguale a $p^*:=argmax_p V(\bar{\pi}(p))$, il prezzo ottimale se l'impresa è neutrale al rischio. Siccome $\frac{d}{dp}[V(\bar{\pi}(p^*))]=0$, la *proposizione 1* implica

$$U'^{+}(p^*)<0<U'^{-}(p^*). \tag{6.1}$$

Si considerino adesso le funzioni $p_0 \mapsto U'^{+}(p_0)$ e $p_0 \mapsto U'^{-}(p_0)$. Se esse sono continue, allora esiste un intorno N di p^* tale per cui la [6.1] implica

$$U'^{+}(p_0)<0<U'^{-}(p_0) \text{ per ogni } p_0 \in N.$$

Ma allora è ottimale per l'impresa avversa al rischio con prezzo di *status quo* $p_0 \in N$ non cambiare il prezzo attuale, e di conseguenza ogni $p_0 \in N$, $p_0 \neq p^*$, è un prezzo fisso endogeno nel senso della seguente definizione:

definizione: Il prezzo di *status quo* $p_0 \neq p^*$ è detto *prezzo fisso endogeno* se è subottimale nel caso di neutralità al rischio ma ottimale nel caso di avversione al rischio.

Possiamo riassumere l'analisi fin qui svolta nel seguente teorema:

teorema 1: Siano soddisfatte le ipotesi [A1]-[A3] ed esistano $i \in I \setminus J$, $j \in I \setminus J$ tali che $q_i'^{-}(p^*)<0$, $q_j'^{+}(p^*)>0$; inoltre siano $p_0 \mapsto U'^{-}(p_0)$ e $p_0 \mapsto U'^{+}(p_0)$ funzioni continue in un intorno di p^*. Allora esistono prezzi fissi endogeni.

Gli esempi da *1* a *3* soddisfano le ipotesi del *teorema 1*. Infatti, A^- varia in modo continuo al variare di $p_0>0$; e siccome anche $p_0 \mapsto (d/dp)[V(\bar{\pi}(p_0)]$ è funzione continua, segue dal *lemma 1* che lo è anche $p_0 \mapsto U'^{-}(p_0)$. In questi casi esistono prezzi fissi endogeni.

Abbiamo già fatto notare che la continuità debole delle distribuzioni di probabilità $\mu(p|p_0)$ solitamente utilizzata nella teoria delle decisioni in circostanza di incertezza non impedisce che ci siano spigoli nella funzione d'utilità attesa $U(p|p_0)$ e, alla luce della *proposizione 1* e

del *teorema 1*, essa non esclude l'esistenza di prezzi fissi endogeni. È interessante indagare quale altra (e necessariamente più forte) condizione di continuità per distribuzioni di probabilità possa escludere l'esistenza di prezzi fissi endogeni. Una tale condizione risulta essere la continuità che deriva dalla convergenza chiusa, concetto che si riferisce alla topologia della convergenza chiusa [cfr. Hildenbrand 1974]. Intuitivamente esso richiede che, affinché una successione di misure di probabilità converga, devono convergere i supporti delle stesse. Nel presente contesto questo si traduce nella seguente condizione:

[A4] Sia $supp[\mu]$ il supporto della misura di probabilità μ. Se $p \mapsto p_0$, allora $supp[\mu(p|p_0)] \to \{y_0\}$ relativamente alla topologia della convergenza chiusa.

Nei termini dell'ipotesi [A3], la [A4] implica che $y_i(p_0) = lim_{p \to p_0} y_i(p) = y_0$ per ogni $i \in I$. In altre parole, $J = I$. Ma allora non esiste alcun $i \notin J$, e di conseguenza le condizioni nella *proposizione 1* per l'emergere di uno spigolo non possono essere soddisfatte. Abbiamo pertanto ottenuto il seguente risultato:

proposizione 2: Se sono soddisfatte le condizioni [A1]-[A4], allora non esistono prezzi fissi endogeni.

L'ipotesi aggiuntiva di convergenza chiusa è sufficiente per escludere l'esistenza di prezzi fissi endogeni ma non è necessaria. Questo è chiaro dall'*esempio 3* nel quale, per $q(\cdot)$ tale che $q(p_0) = 1$, spigoli non si presentano anche se $lim_{p \to p_0^-} supp[\mu(p|p_0)] = \{y_0, y_0 + p_0\}$ e $lim_{p \to p_0^+} supp[\mu(p|p_0)] = \{0, y_0\}$. Di conseguenza la caratterizzazione dell'emergere o meno di prezzi fissi endogeni tramite concetti di continuità delle distribuzioni di probabilità non è esaustiva. Procediamo pertanto adesso ad un'ulteriore analisi che coinvolge la varianza delle distribuzioni soggettive dell'impresa.

Sia $\bar{y}(p|p_0)$ la variabile aleatoria con distribuzione $\mu(p|p_0)$. Applicando [A3] la sua varianza è data da

$$var\bar{y}(p|p_0) = \Sigma_i y_i(p)^2 q_i(p) - \bar{y}(p)^2$$

La derivata di $var\bar{y}(p|p_0)$, per $p \neq p_0$, è

$$[6.2] \quad dvar\bar{y}(p|p_0)/dp = \Sigma_i [2y_i(p)y_i'(p)q_i(p) + y_i(p)^2 q_i'(p)] - 2\bar{y}(p)\bar{y}'(p).$$

Consideriamo i limiti per $p \to p_0^-$ e $p \to p_0^+$, cioè $lim_{p \to p_0^-} dvar\bar{y}(p|p_0)/dp =: \varrho^-(p_0)$ e $lim_{p \to p_0^+} dvary(p|p_0)/dp =: \varrho^+(p_0)$. Per la [A3] essi esistono e, siccome $var\bar{y}(p_0|p_0) = 0$, è chiaro che $\varrho^-(p_0) \leq 0$ e $\varrho^+(p_0) \geq 0$. Ciò che non è banale è il seguente risultato dimostrato in Weinrich e Battinelli [1992] (e per completezza riportato nell'appendice):

lemma 2: $\varrho^-(p_0) < 0$ se e solo se $q_i'^-(p_0) < 0$ per almeno un $i \notin J$; $\varrho^+(p_0) > 0$ se e solo se $q_i'^+(p_0) > 0$ per almeno un $i \notin J$.

Per l'interpretazione notiamo che $\varrho^-(p_0) < 0$ e $\varrho+(p_0) > 0$ significano che la funzione di varianza $p \mapsto var\bar{y}(p|p_0)$ ha uno spigolo per $p = p_0$ così com'è illustrato nella figura 6.4. In virtù della *proposizione 1*

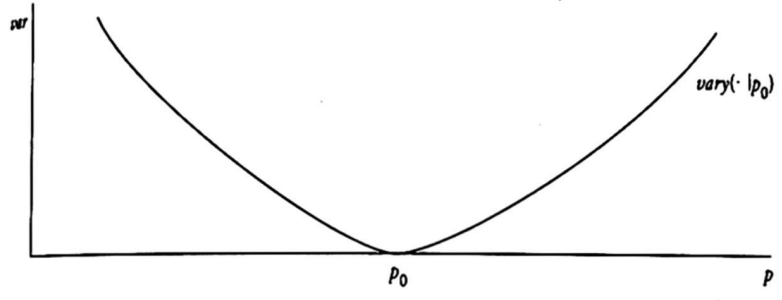

FIG. 6.4

e del *lemma 2* tale spigolo si trasferisce alla funzione di utilità attesa $U(p|p_0)$, ma solo se l'impresa è avversa al rischio. Vale di conseguenza la seguente riformulazione del *teorema 1*:

teorema 2: Siano soddisfatte le condizioni [A1]-[A3]. Allora esistono prezzi fissi endogeni se e solo se l'impresa è avversa al rischio ed esiste un intorno N di p^* tale che la funzione di varianza $p \mapsto var\bar{y}(p|p_0)$ ha uno spigolo in $p = p_0$ per ogni $p_0 \in N$.

Illustriamo l'analisi svolta verificandola per gli esempi studiati precedentemente.

Esempio 4: Consideriamo le funzioni $y_i(\cdot)$ e $\mathbf{q}(\cdot)$, $i = 1,\ldots, 4$, così come sono specificate negli *esempi da 1 a 3*. Per $p \leq p_0$ si ottiene

$$var\bar{y} = y_0^2(p/p_0)(1-q) + (y_0+p_0)^2(1-p/p_0)(1-q) + \\ + (y_0+p_0-p)^2 q - (y_0+p_0-p)^2$$

$$= (1-q)[y_0^2(p/p_0) + y_0^2 - y_0^2(p/p_0) + 2y_0 p_0 - \\ - 2y_0 p_0 + p_0^2 - p_0 p - (y_0+p_0-p)^2]$$

$$= (1-q)[(y_0+p_0)^2 - (2y_0+p_0)p - (y_0+p_0-p)^2]$$

$$= (1-q)(p_0 p - p^2) \geq 0 \quad per\ p \leq p_0.$$

Ammettendo che q sia funzione di p, $q = q(p)$, si ha

$$dvar\bar{y}/dp = -q'(p)(p_0 p - p^2) + [1-q(p)](p_0 - 2p)$$

e pertanto

$$\varrho^-(p_0) = -p_0[1-q(p_0)].$$

Tale espressione è negativa se e solo se $q(p_0) < 1$. Dal confronto con le conclusioni dell'*esempio 3* si vede che la funzione di varianza ha uno spigolo se e solo se ha uno spigolo la funzione d'utilità attesa.

Consideriamo adesso il caso in cui l'impresa ritenga che la quantità domandata $\bar{y}(p|p_0)$ abbia una distribuzione definita tramite una funzione di densità. Si può allora dimostrare il seguente risultato che è una versione del *teorema 2*:

teorema 3: Si supponga che per $p \neq p_0$ la distribuzione soggettiva $\mu(p|p_0)$ di $\bar{y}(p|p_0)$ sia data tramite una funzione di densità $y \mapsto f(y,p)$ continua in y e derivabile in p. Si supponga inoltre che valgano la [A1] e la [A2] e che $\mu(p|p_0) \to \delta(y_0)$ debolmente per $p \to p_0$. Allora esistono prezzi fissi endogeni se e solo se esiste un intorno N di p^* in cui la funzione di varianza $var\bar{y}(p|p_0)$ ha uno spigolo in $p = p_0$ per ogni $p_0 \in N$.

Esempio 5: Si supponga che per ogni punto di *status quo* (p_0, y_0) l'impresa creda che $\bar{y}(p_0|p_0) = y_0$ con probabilità uno e che per $p \neq p_0$ la variazione in y, $z = y - y_0$, sia distribuita secondo una lognormale con parametri $\nu(d)$ e $\sigma(d)$, dove $d = p - p_0$. Perciò, se si pone

$$g(z; \nu, \sigma) = \frac{1}{z\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-[\ln(z)-\nu]^2/2\sigma^2},$$

$\bar{y}(p|p_0)$ ha densità

$$f(y_0+z, p_0+d) = \begin{cases} g(z; \nu(d), \sigma(d)) & \text{per } zd < 0 \\ 0 & \text{per } zd \geq 0 \end{cases}$$

allora

$$\bar{y}(p_0+d)=\begin{cases} y_0-sgn(d)e^{\nu(d)+[\sigma(d)]^2/2} & \text{per } d\neq 0 \\ y_0 & \text{per } d=0 \end{cases}$$

$$var\bar{y}(p_0+d)=e^{2\nu(d)}\{e^{2[\sigma(d)]^2}-e^{[\sigma(d)]^2}\} \text{ per } d\neq 0$$

mentre $var\bar{y}(p_0)=0$. Si specifichino adesso le funzioni ν e σ come soluzione in dipendenza di d del sistema di equazioni

$$e^{\nu+(\sigma^2/2)}=|d|,\ e^{2\nu}\{e^{2\sigma^2}-e^{\sigma^2}\}=|d|^{2\gamma}$$

con $\gamma>0$ un parametro dato, cioè

$$\nu(d)=\ln|d|-\frac{1}{2}\ln(|d|^{2\gamma-2}+1),\ \sigma(d)=\sqrt{\ln(|d|^{2\gamma-2}+1}.$$

Sostituendo nelle espressioni precedenti per $\bar{y}$ e $var\bar{y}$ si ottiene che

$$\bar{y}(p_0+d)=y_0-d,\ var\bar{y}(p_0+d)=|d|^{2\gamma}.$$

Perciò $\mu(p|p_0)\to\delta(y_0)$ per $p\to p_0$ debolmente mentre $supp[\mu(p|p_0)]=[y_0,\infty[$ per ogni $p<p_0$ e $supp[\mu(p|p_0)]=]-\infty, y_0]$ per ogni $p>p_0$. La derivata di $var\bar{y}(p_0+d)$ è $2\gamma|d|^{2\gamma-1}$ e tende a zero per $p\to p_0$ se e solo se $\gamma>\frac{1}{2}$. Di conseguenza, per $\gamma\leq\frac{1}{2}$ il *teorema 3* implica l'esistenza di prezzi fissi endogeni.

Si noti che in questo esempio una specificazione apparentemente differenziabile dell'ambiente economico può generare una funzione di reazione dell'impresa spigolosa, per di più in dipendenza di una variazione continua di un unico parametro. Questo non è esattamente quel che ci si aspetta da un punto di vista intuitivo e illustra quanto possano essere intricate le origini delle rigidità nominali dei prezzi.

4. Vischiosità dei prezzi se non esistono prezzi fissi endogeni

Come si è visto nel paragrafo precedente, l'avversione al rischio può dar luogo a dei prezzi fissi endogeni nel senso che un'impresa avversa al rischio può preferire non cambiare il suo prezzo anche se questo è subottimale quando vi è neutralità al rischio. La condizione

decisiva affinché accada questo è che la funzione di varianza della variabile aleatoria «quantità domandata» abbia uno spigolo in corrispondenza al prezzo di *status quo*. Ma anche quando ciò non si verifica, l'avversione al rischio può ancora condizionare la misura in cui l'impresa è disposta ad aggiustare il suo prezzo. Infatti, come ci proponiamo di far vedere nel seguito, più avversa al rischio è l'impresa, più piccoli sono gli aggiustamenti del prezzo che è disposta a fare. A tale proposito saremo adesso più specifici nelle ipotesi che riguardano le distribuzioni di probabilità soggettive dell'impresa e la sua funzione d'utilità.

Sia come prima (p_0, y_0) la coppia prezzo-quantità dello *status quo*. Utilizzando la notazione introdotta in [A3], supponiamo adesso:

[B1] Sia $\beta \in [0,1]$. La distribuzione sulle quantità domandate soggettiva dell'impresa, per ogni prezzo p, è data da

$$\mu(p|p_0) = \left[\left(y(p,\beta), \frac{1}{2}\right), \left(y\left(p, -\beta\right), \frac{1}{2}\right)\right]$$

dove

$$y(p,\beta) = y_0 + (1+\beta)(p_0 - p).$$

Dalla [B1] segue immediatamente che $\bar{y}(p) = y_0 + p_0 - p$ e $\bar{\pi}(p) = (p-c)(y_0 + p_0 - p)$. Se $\tilde{y}(p)$ indica la variabile aleatoria con distribuzione $\mu(p|p_0)$, allora la sua varianza è $var\tilde{y}(p) = \beta^2(p_0 - p)^2$. Perciò β può essere interpretato come misura dell'incertezza alla quale si trova di fronte l'impresa. In particolare per $\beta = 0$ non c'è alcuna incertezza. Inoltre, per $\beta > 0$, l'incertezza cresce al crescere della differenza $|p_0 - p|$.

Per quanto riguarda la funzione d'utilità dell'impresa supponiamo:

[B2] La funzione di utilità dell'impresa è del tipo CRRA, cioè

$$V_\alpha(\pi) = \begin{cases} \pi^\alpha/\alpha \,, & \alpha \leq 1 \,, \ \alpha \neq 0 \\ \ln \pi \,, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Di conseguenza l'avversione al rischio relativa dell'impresa, $-\pi V''(\pi)/V'_\alpha(\pi)$, è costante e uguale a $r = 1 - \alpha$. Pertanto $r \to \infty$ se $\alpha \to -\infty$.

È facile verificare che [B1] e [B2] implicano sia [A1]-[A3], sia [A4]. Segue allora che non esistono prezzi fissi endogeni.

[B1] e [B2] danno luogo alla funzione di utilità attesa

$$E^{V}_{\alpha}\pi = \begin{cases} \dfrac{(p-c)^{\alpha}}{2\alpha}\,[y(p,\beta)^{\alpha}+y(p,-\beta)^{\alpha}] & \text{se } \alpha \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}\,\{\ln[(p-c)y(p,\beta)+\ln[(p-c)y(p,-\beta)]\} & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

$$=: U(p|p_0, \alpha, \beta).$$

Sia $\hat{p}(\alpha,\beta) = argmax_p U(p|p_0, \alpha, \beta)$ il *prezzo ottimale in circostanza di incertezza* e, come prima, $p^* = argmax_p V(\bar{\pi}(p))$ il prezzo ottimale in circostanza di neutralità al rischio. Ovviamente $\hat{p}(1,\beta) = p^* = \hat{p}(\alpha,0)$ per ogni α e β. Per $\alpha < 1$ e $\beta < 1$ si può dimostrare che $\hat{p}(\alpha,\beta)$ differisce da p^*. Più precisamente vale il seguente risultato la cui dimostrazione si trova in Weinrich e Battinelli [1992]:

proposizione 3: Siano soddisfatte le condizioni [B1] e [B2], e sia $p_0 \neq p^*$. Allora la differenza fra il prezzo di *status quo* e il prezzo ottimale in circostanza di incertezza decresce al crescere dell'avversione al rischio e/o al crescere dell'incertezza:

$$i)\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\,|p_0 - \hat{p}(\alpha,\beta)\,| > 0 \text{ er } \alpha \leq 1, \beta > 0;$$

$$ii)\ \frac{\partial}{\partial\beta}\,|p_0 - \hat{p}(\alpha,\beta)\,| < 0 \text{ er } \alpha < 1, \beta > 0.$$

La *i)* stabilisce che la misura in cui l'impresa aggiusta il suo prezzo funzione decrescente della sua avversione al rischio, come illustra la figura 6.5. Esso non implica, però, che l'aggiustamento tende sempre a zero quando l'avversione al rischio tende ad infinito. Di fatto questo è

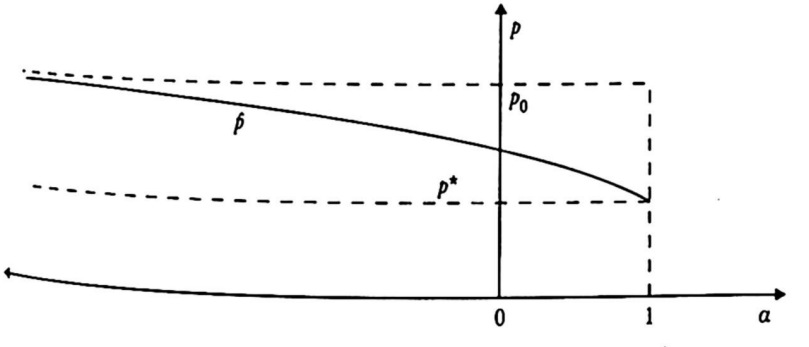

FIG. 6.5

vero solo se l'incertezza β è sufficientemente grande. In termini precisi vale il seguente teorema, per la cui dimostrazione rimandiamo a Weinrich e Battinelli [1992]:

teorema 4: Siano valide le ipotesi [B1] e [B2]. Allora esiste un $\beta_0 \in]0,1[$ tale che $lim_{\alpha \to -\infty} \hat{p}(\alpha, \beta) = p_0$ se e solo se $\beta \geq \beta_0$.

5. Conclusioni

Nel presente lavoro è stato messo in luce che l'avversione al rischio da parte delle imprese può essere un elemento decisivo nella spiegazione della rigidità nominale dei prezzi. Sono state identificate circostanze sotto le quali un'impresa avversa al rischio non cambia il suo prezzo malgrado un'impresa neutrale al rischio lo farebbe. L'ipotesi di base è che l'impresa è incerta sulla quantità domandata, ad eccezione che in corrispondenza del prezzo di *status quo*. Questo implica l'esistenza di prezzi fissi endogeni, quando la varianza della quantità domandata come funzione del prezzo ha uno spigolo al prezzo di *status quo* e tale prezzo è sufficientemente vicino al prezzo ottimale in caso di neutralità al rischio. Questo fatto a sua volta è compatibile con la continuità debole delle distribuzioni di probabilità coinvolte ma non con la continuità implicata dalla convergenza chiusa.

Il risultato ottenuto può anche essere visto come una generalizzazione di quello di Sweezy [1939] sulla curva di domanda spezzata: in circostanza di incertezza con avversione al rischio, per ottenere prezzi fissi, non è necessario uno spigolo nella curva di domanda stessa ma solo nella funzione di varianza collegata alle distribuzioni di probabilità soggettive dell'impresa riguardanti le quantità domandate.

Nella seconda parte del lavoro è stato analizzato uno scenario in cui non esistono prezzi fissi endogeni per far vedere che anche in tale circostanza l'avversione al rischio produce una differenza cruciale rispetto alla neutralità al rischio. Infatti, anche se non esistono prezzi fissi, essi possono essere approssimati con precisione arbitraria nel senso che, comunque piccolo sia l'aggiustamento del prezzo immaginato, esiste un grado di avversione al rischio tale che l'aggiustamento effettivo non eccede quello immaginato.

Il modello presentato in questo lavoro riguarda la decisione della singola impresa, senza analizzare le ripercussioni sull'andamento del mercato composto da più imprese avverse al rischio. La modellizzazione formale di quest'altro problema sarà il prossimo passo da compiere per comprendere meglio la portata dell'ipotesi di avversione al rischio da parte delle imprese per la Nuova Economia Keynesiana.

Dimostrazione del lemma 1: Per definizione di $\bar{y}(p)$, $\sum_i y_i(p)q_i(p) = \bar{y}(p)$ per ogni p. Derivando si ottiene

$$\sum_i y_i'(p)q_i(p) = \bar{y}'(p) - \sum_i y_i(p)q_i'(p) \text{ per } p \neq p_0.$$

Per $p \to p_0^-$,

$$[6.3] \qquad \sum_{i \in J} y_i'(p_0)q_i(p_0) = \bar{y}'(p_0) - \sum_{i \in I} y_i(p_0)q_i'^-(p_0)$$

Dalla [6.1] si ha che

$$U'^-(p_0) = \sum_{i \in J} V'((p_0 - c)y_i(p_0))[y_i(p_0) + (p_0 - c)y_i'(p_0)]q_i(p_0) +$$

$$+ \sum_{i \in I} V((p_0 - c)y_i(p_0))q_i'(p_0) =$$

$$= V'(\pi_0)y_0 + V'(\pi_0)(p_0 - c)\sum_{i \in J} y_i'(p_0)q_i(p_0) +$$

$$+ \sum_{i \in I} V(\pi_i)q_i'^-(p_0)$$

utilizzando la [6.3], si ottiene

$$U'^-(p_0) = V'(\pi_0)y_0 + V'(\pi_0)(p_0 - c)\{\bar{y}'(p_0) - \sum_{i \in I} y_i(p_0)q_i'^-(p_0)\}$$

$$+ \sum_{i \in I} V(\pi_i)q_i'^-(p_0) =$$

$$= V'(\pi_0)[y_0 + (p_0 - c)\bar{y}'(p_0)] + \sum_{i \in I}[V(\pi_i) - V'(\pi_0)\pi_i]q_i'^-(p_0) =$$

$$= \frac{d}{dp}[V(\bar{\pi}(p))]_{p=p_0} + A^-$$

con $A^- := \sum_{i \in I}[V(\pi_i) - V'(\pi_0)\pi_i]q_i'(p_0)$. A^- può essere scritto

$$A^- = \sum_{i\in I}[V(\pi_0) - V'(\pi_0)\pi_0 + \sum_{n=2}^{\infty} V^{(n)}(\pi_0)\frac{(\pi_i-\pi_0)^n}{n!}q_i'^-(p_0) =$$

$$= [V(\pi_0) - V'(\pi_0)\pi_0]\sum_{i\in I} q_i'^-(p_0) +$$

$$+ \sum_{i\in J}[\sum_{n=2} V^{(n)}(\pi_0)\frac{(\pi_i-\pi_0)^n}{n!}q_i'^-(p_0) +$$

$$+ \sum_{i\notin J}\left[\sum_{n=2}^{\infty} V^{(n)}(\pi_0)\frac{(\pi_i-\pi_0)^n}{n!}\right]q_i'^-(p_0).$$

Il primo addendo di questa somma è nullo perché $\sum_{i\in I} q_i(p) = 1$ per ogni p implica $\sum_{i\in I} q_i'(p_0) = 0$, il secondo è pure nullo perché per $i\in J$ $\pi_i = \pi_0$. Questo dimostra l'affermazione per $U'^-(p_0)$; quella per $U'^+(p_0)$ si ottiene in modo analogo.

Dimostrazione del lemma 2: Dalla [6.2], tenendo conto che

$\sum_{i\in J_{qi}} q_i(p_0) = 1$, si ha

$$\varrho^-(p_0) = \sum_{i\in I}[2y_i(p_0)y_i'(p_0)q_i(p_0) + y_i(p_0)^2 q_i'^-(p_0)] - 2y_0\bar{y}'(p_0) =$$

$$= 2y_0\sum_{i\in J} y_i'(p_0)q_i(p_0) + \sum_{i\in I} y_i(p_0)^2 q_i'^-(p_0) - 2y_0\bar{y}'(p_0) =$$

$$= 2y_0[\sum_{i\in J} y_i'(p_0)q_i(p_0) - \bar{y}'(p_0)] + \sum_{i\in I} y_i(p_0)^2 q_i'^-(p_0)$$

La [6.2] e il fatto che $\sum_{i\in I} q_i'^-(p_0) = 0$ implicano poi che

$$\varrho^-(p_0) = -2y_0\sum_{i\in I} y_i(p_0)q_i'^-(p_0) + \sum_{i\in I} y_i(p_0)^2 q_i'^-(p_0)$$

$$= -2y_0\sum_{i\notin J} y_i(p_0)q_i'^-(p_0) - 2y_0^2\sum_{i\in J} q_i'^-(p_0)$$

$$+\sum_{i\notin J} y_i(p_0)^2 q_i'^{-}(p_0) + y_0^2 \sum_{i\in J} q_i'^{-}(p_0)$$

$$= \sum_{i\notin J} y_i(p_0)^2 q_i'^{-}(p_0) - y_0^2 \sum_{i\in J} q_i'^{-}(p_0) - 2y_0 \sum_{i\notin J} y_i(p_0) q_i'^{-}(p_0)$$

$$= \sum_{i\notin J} y_i(p_0)^2 q_i'^{-}(p_0) + y_0^2 \sum_{i\in J} q_i'^{-}(p_0) - 2y_0 \sum_{i\notin J} y_i(p_0) q_i'^{-}(p_0)$$

$$= \sum_{i\notin J} [y_i(p_0) - y_0]^2 q_i'^{-}(p_0).$$

Siccome per $i\notin J$, $y_i(p_0)\neq y_0$, questo prova l'affermazione per $\varrho^{-}(p_0)$; quella per $\varrho^{+}(p_0)$ segue analogamente.

Riferimenti bibliografici

Aghion, P., Bolton, P., Harris, C. e Jullien, B. (1991), *Optimal Learning by Experimentation*, «Review of Economic Studies», 58, pp. 621-654.

Akerlof, G. e Yellen, J. (1985), *A Near-Rational Model of the Business Cycle with Wage and Price Inertia*, «Quarterly Journal of Economics», 100, Suppl., pp. 823-838.

Allen, F. (1988), *A Theory of Price Rigidities when Quality is Unobservable*, «Review of Economic Studies», LV, pp. 139-151.

Ball, L. e Cecchetti, S. (1987), *Imperfect Information and Staggered Price Setting*, «NBER Working Paper», n. 2201.

Balvers, R.J. e Cosimano, T.F. (1989), *Actively Learning about Demand and the Dynamics of Price Adjustment*, Department of Finance & Business Economics Discussion Paper, University of Notre Dame.

Bhaduri, A. e Falkinger, J. (1990), *Optimal Price Adjustment under Imperfect Information*, «European Economic Review», 34, pp. 941-952.

Blanchard, O.J. e Fischer, J. (1989), *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge, Mass., MIT Press.; trad. it. *Lezioni di macroeconomia*, Bologna, Il Mulino, 1992.

Blinder, A. (1982), *Inventories and Sticky Prices: more on the Microeconomic Foundations of Macroeconomics*, «American Economic Review», 72, pp. 334-348.

Carlton, D.W. (1986), *The Rigidity of Prices*, «American Economic Review», pp. 637-658.

Drèze, J.H. (1979), *Demand Estimation, Risk Aversion and Sticky Prices*, «Economics Letters», 4, pp. 1-6; ristampato in Drèze (1991), *Underemployment Equilibria. Essays in Theory, Econometrics and Policy*, cap. 9, Cambridge, Cambridge University Press.

Gale, D. (1979), *Large Economies with Trading Uncertainty*, «Review of Economic Studies», pp. 319-338.
Gordon, R.J. (1981), *Output Fluctuations and Gradual Price Adjustment*, «Journal of Economic Literature», 19, pp. 493-530.
Greenwald, B. e Stiglitz, J.H. (1989), *Toward a Theory of Rigidities*, «American Economic Review», vol. 79, n. 2, pp. 364-369.
Hildenbrand, W. (1974), *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton-London, Princeton University Press.
Mankiw, N.G. e Romer, D. (a cura di) (1991), *New Keynesian Economics*, vol. 1, Cambridge, Mass., Mit Press.
Sheshinski, E. e Weiss, Y. (1983), *Optimum Pricing Uncertainty under Stochastic Inflation*, «Review of Economic Studies», 50, pp. 513-529.
Sweezy, P.M. (1939), *Demand under Conditions of Oligopoly*, «Journal of Political Economy», 47, pp. 568-573.
van Moeseke, P. (1965), *Stochastic Linear Programming: A Study in Resource Allocation under Risk*, «Yale Economic Essays», 5, pp. 196-254.
Weinrich, G. e Battinelli, A. (1992), *Price Rigidity due to Uncertainty and Risk Aversion*, Quaderno dell'Istituto di Econometria e Matematica per le Decisioni Economiche, n. 12, Milano, Università Cattolica del Sacro Cuore.