

2. L'equilibrio intertemporale del debito pubblico

di Aldo Montesano

1. Introduzione

L'influenza del debito pubblico sull'economia può essere analizzata in vari modi e con varie ipotesi. La tesi che un alto debito pubblico accresca l'instabilità del sistema, almeno nel senso che determina vincoli alle azioni di politica economica, è ormai condivisa¹. L'analisi però tende a considerare la dinamica del debito pubblico indipendentemente dalle altre grandezze economiche; queste vengono assunte come date, determinate esogenamente. Lo scopo di questo lavoro è quello di fornire un'analisi in cui tutte le variabili principali dell'economia vengono determinate simultaneamente con il debito pubblico, in modo da tener conto di tutte le eventuali interrelazioni.

La via seguita in questo lavoro assume, oltre una inevitabile eroica schematizzazione dell'economia, la piena razionalità intertemporale del settore privato (oltre che la perfetta informazione). Questa ipotesi consente di determinare simultaneamente tutte le grandezze economiche in gioco, incluso il tasso di crescita del prodotto nazionale e il tasso d'interesse reale, e di individuare una condizione di sostenibilità del debito pubblico. Vengono studiati due modelli che differiscono fra loro soltanto perché nel primo modello i titoli del debito pubblico e il capitale reale sono perfettamente sostituibili nelle preferenze del settore privato (in accordo con l'impostazione monetarista fisheriana e con le assunzioni implicite delle analisi moderne in tema di debito pubblico) mentre nel secondo modello i titoli costituiscono, nelle preferenze del settore privato, un'attività intermedia fra la moneta e il capitale reale contribuendo in qualche modo a fornire servizi di liquidità.

2. Un modello con titoli illiquidi

Vi sono due agenti, il primo denominato settore pubblico e il secondo settore privato.

¹ Un'ampia esposizione di temi e analisi al riguardo è offerta da Buiter [1985, 13-79].

Il settore pubblico sceglie la quantità G di merce da consumare (spesa pubblica), l'ammontare delle imposte T e il tasso di crescita μ della quantità di moneta M ed è soggetto al vincolo di bilancio seguente, che determina l'accrescimento del debito pubblico,

$$(1) \quad \frac{dM}{dt} + \frac{dB}{dt} + T = iB + pG,$$

ove B indica l'ammontare del debito pubblico, i il tasso d'interesse nominale sui titoli del debito pubblico, p il prezzo della merce. Sia la spesa pubblica proporzionale alla produzione reale Y ,

$$(2) \quad G = \gamma Y$$

con $\gamma \geq 0$, le imposte proporzionali al reddito prodotto

$$(3) \quad T = \tau p Y$$

con $\tau \geq 0$, e la quantità di moneta crescente a tasso costante

$$(4) \quad \frac{dM}{dt} = \mu M,$$

con $\mu \geq 0$. (Con lettere greche vengono indicati i parametri costanti nel tempo e con lettere latine le grandezze che possono variare nel tempo).

Il settore privato sceglie le sue attività patrimoniali, costituite da capitale reale K (composto da merce prodotta), titoli B e moneta M , in modo da massimizzare il funzionale

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{1-\sigma} \left(C^{1-\sigma} + \alpha \left(\frac{M}{p} \right)^{1-\sigma} \right) e^{-\rho(t-t_0)} dt$$

in cui t_0 è il tempo cui è riferita l'analisi, subordinatamente ai vincoli di produzione

$$(5) \quad Y = \delta K^{\theta} e^{(1-\theta) v(t-t_0)}$$

e di bilancio

$$(6) \quad iB + p \left(Y - C - \frac{dK}{dt} \right) = \frac{dM}{dt} + \frac{dB}{dt} + T,$$

ove C indica il consumo, $\rho \geq 0$ il tasso di preferenza temporale e $\sigma \geq 0$ l'elasticità dell'utilità marginale sia del consumo (cioè $\sigma = -\frac{C}{U_c} U_{cc}$) che del servizio di liquidità (reso per assunzione soltanto dalla moneta), $0 < \vartheta < 1$ l'elasticità della produzione rispetto al capitale (cioè $\vartheta = \frac{K}{Y} Y_K$) e $(1-\vartheta)\nu \geq 0$, il tasso di progresso tecnico, mentre $\alpha > 0$ e $\delta > 0$ sono due parametri ulteriori.

Non tenendo conto per ora delle condizioni di trasversalità, la scelta del settore privato richiede che siano soddisfatte le condizioni seguenti², oltre i vincoli (5) e (6),

$$(7) \quad \delta \vartheta K^{-(1-\vartheta)} e^{(1-\vartheta)\nu(t-t_0)} = \rho + \frac{\sigma}{C} \frac{dC}{dt},$$

$$(8) \quad i = \rho + \frac{\sigma}{C} \frac{dC}{dt} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt},$$

$$(9) \quad \alpha \left(\frac{pC}{M} \right)^\sigma = \rho + \frac{\sigma}{C} \frac{dC}{dt} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}.$$

L'equilibrio sul mercato della merce richiede infine che la spesa pubblica uguagli la produzione non utilizzata dal settore privato, cioè $G = Y - C - \frac{dK}{dt}$. Questa condizione, però, avendo già imposto implicitamente l'uguaglianza fra offerta e domanda di moneta e fra offerta e domanda di titoli, risulta implicata dai vincoli di bilancio (1) e (6), come richiede la legge di Walras.

Le relazioni (1)-(9) riguardano le nove variabili M, B, T, G, Y, C, K, p e i .

Considerando le relazioni (1), (2), (5), (6), e (7) è possibile estrarre due relazioni dinamiche nelle due sole variabili K e C

$$\frac{dK}{dt} = (1-\gamma) \delta \vartheta K^\vartheta e^{(1-\vartheta)\nu(t-t_0)} - C,$$

$$\frac{\sigma}{C} \frac{dC}{dt} = \delta \vartheta K^{-(1-\vartheta)} e^{(1-\vartheta)\nu(t-t_0)} - \rho.$$

² Queste condizioni possono essere ottenute agevolmente scrivendo le equazioni di Eulero del problema di calcolo delle variazioni ottenuto sostituendo nel funzionale obiettivo alla variabile C l'espressione

$$\delta K^\vartheta e^{(1-\vartheta)\nu(t-t_0)} - \frac{dK}{dt} - \frac{1}{p} \left(iB - \frac{dM}{dt} - \frac{dB}{dt} - T \right)$$

risultante dalle relazioni (5) e (6).

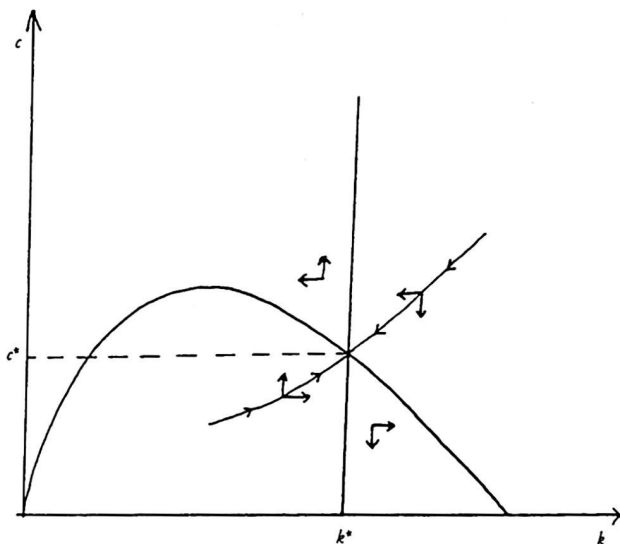


FIGURA 1.

Definendo due nuove variabili

$$c = C e^{-\nu(t-t_0)}, \quad k = K e^{-\nu(t-t_0)}$$

e sostituendo c, k a C, K , il sistema precedente diviene

$$\frac{dk}{dt} = -\nu k + (1-\gamma) \delta k^\vartheta - c,$$

$$\frac{\sigma}{dc} \frac{dc}{dt} = -\sigma \nu - \varrho + \delta \vartheta k^{-(1-\vartheta)},$$

il cui piano di fase (figura 1) individua per $c > 0$ e $k > 0$ un punto di sella. Una condizione di trasversalità allora impone di seguire il sentiero di crescita convergente verso il punto singolare³. Si noti come

³ Questa analisi è del tutto analoga a quella tradizionale della teoria della crescita ottima: ad esempio Intriligator [1971, 398-416]. L'equazione del sentiero convergente non è facilmente determinabile. Se è $\vartheta = (1-\gamma)\sigma$ allora il sentiero convergente ha equazione $c = \frac{\varrho}{\sigma} k$ ed è, inoltre,

$$\frac{k}{k^*} = \left(1 - \left(1 - \left(\frac{k_0}{k^*}\right)^{1-\vartheta}\right) e^{-(\nu+\frac{\varrho}{\sigma})(1-\vartheta)(t-t_0)}\right)^{\frac{1}{1-\vartheta}}.$$

l'andamento delle grandezze reali C , K (e conseguentemente Y e G) non dipenda dalla politica di finanziamento del disavanzo scelta dal settore pubblico. Nel seguito, per semplicità, si assume che il sistema economico sia già al tempo iniziale nel punto singolare (sia cioè $K_0 = k^*$) le cui coordinate sono

$$k^* = \left(\frac{\delta \vartheta}{\rho + \sigma \nu} \right)^{\frac{1}{1-\vartheta}}, \quad c^* = k^* \left(\frac{1-\gamma}{\vartheta} (\rho + \sigma \nu) - \nu \right).$$

Si noti come queste coordinate richiedano

$$\rho > \left(\frac{\vartheta}{1-\gamma} - \sigma \right) \nu.$$

Si ottiene, perciò,

$$K = K_0 e^{\nu(t-t_0)}, \quad C = C_0 e^{\nu(t-t_0)}, \quad Y = Y_0 e^{\nu(t-t_0)}, \quad G = G_0 e^{\nu(t-t_0)}$$

con

$$K_0 = k^*, \quad C_0 = c^*, \quad Y_0 = \delta K_0^{\vartheta}, \quad G_0 = \gamma Y_0.$$

La funzione C appena individuata richiede, perché il funzionale obiettivo sia limitato, che $\rho + (\sigma - 1) \nu > 0$.

Rimangono da determinare gli andamenti delle cinque variabili M , B , T , p e i , per le quali possono essere utilizzate le relazioni (1), (3), (4), (8) e (9). Si assumano le due condizioni di trasversalità seguenti: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M}{pY} < \infty$, cioè la quantità finale di moneta non deve essere infinitamente superiore al reddito nominale, e $\lim_{t \rightarrow \infty} B e^{-i(t-t_0)} = 0$, cioè il valore attuale dell'ammontare finale di titoli deve essere nullo.

Per l'analisi successiva conviene eseguire alcune trasformazioni di variabili, introducendo le nuove variabili $m = \frac{M}{pY}$, $b = \frac{B}{pY}$ ed eliminando M e B . Le condizioni di trasversalità richiedono $\lim_{t \rightarrow \infty} m < \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} b e^{-(\rho + (\sigma - 1) \nu)(t-t_0)} = 0$.

Allora, tenendo conto della (3), le relazioni (1), (4), (8) e (9) divengono

$$(1bis) \quad \frac{dm}{dt} + \frac{db}{dt} = \gamma - \tau + \left(i - \nu - \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \right) b - \left(\nu + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \right) m,$$

$$(4bis) \quad \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = \mu - \nu - \frac{1}{p} \frac{dp}{dt},$$

$$(8bis) \quad i = \varrho + \sigma v + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt},$$

$$(9bis) \quad \alpha \left(\frac{C_0}{Y_0} \right)^\sigma = \left(\varrho + \sigma v + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \right) m^\sigma$$

Risolvendo le relazioni (8bis) e (9bis) rispetto ad i ed a $\frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$, con facili sostituzioni si ottengono le due equazioni differenziali seguenti

$$(10) \quad \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = \mu + \varrho (\sigma - 1) v - \alpha \left(\frac{C_0}{Y_0} \right)^\sigma m^{-\sigma},$$

$$(11) \quad \frac{db}{dt} = \gamma - \tau + (\varrho + (\sigma - 1) v) b - \mu m.$$

La soluzione dell'equazione (10) è ⁴:

$$m = \left[\frac{\alpha \left(\frac{C_0}{Y_0} \right)^\sigma}{\mu + \varrho + (\sigma - 1) v} + \left(m_0^\sigma - \frac{\alpha \left(\frac{C_0}{Y_0} \right)^\sigma}{\mu + \varrho + (\sigma - 1) v} \right) e^{(\mu + \varrho + (\sigma - 1) v) \sigma (t - t_0)} \right]^{\frac{1}{\sigma}}$$

La condizione di trasversalità $\lim_{t \rightarrow \infty} m < \infty$ richiede allora

$$m_0 \leq \frac{C_0}{Y_0} \left(\frac{\alpha}{\mu + \varrho + (\sigma - 1) v} \right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Però, se questa disuguaglianza valesse con il segno forte, allora m diventerebbe nullo per un t sufficientemente elevato ma finito, in cui perciò p diverrebbe infinito. Poiché questa situazione è per il settore privato (che determina m_0 attraverso p_0) meno conveniente di quella in cui m è positivo si avrà necessariamente

$$m_0 = \frac{C_0}{Y_0} \left(\frac{\alpha}{\mu + \varrho + (\sigma - 1) v} \right)^{\frac{1}{\sigma}},$$

⁴ Nel caso $\sigma = 0$ si ottiene $m = m_0 e^{(\mu + \varrho - v - \alpha)(t - t_0)}$.

quindi $m=m_0$, costante nel tempo⁵, e

$$(12) \quad p_0 = \frac{M_0}{C_0} \left(\frac{\mu + \varrho + (\sigma - 1)\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Tenuto conto di questa soluzione per m , l'equazione (11) ha soluzione

$$b = \frac{\mu m_0 + \tau - \gamma}{\varrho + (\sigma - 1)\nu} + \left(b_0 - \frac{\mu m_0 + \tau - \gamma}{\varrho + (\sigma - 1)\nu} \right) e^{(\varrho + (\sigma - 1)\nu)(t - t_0)}.$$

La condizione di trasversalità $\lim_{t \rightarrow \infty} b e^{-(\varrho + (\sigma - 1)\nu)(t - t_0)} = 0$, tenendo conto che deve essere $b \geq 0$, richiede allora

$$(13) \quad b_0 \leq \frac{\mu m_0 + \tau - \gamma}{\varrho + (\sigma - 1)\nu},$$

condizione questa che esprime il vincolo di sostenibilità del debito pubblico e può essere scritta anche nella forma

$$\frac{B_0}{M_0} \leq \frac{1}{\varrho + (\sigma - 1)\nu} \left(\mu + (\tau - \gamma) \frac{Y_0}{C_0} \left(\frac{\mu + \varrho + (\sigma - 1)\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right).$$

Si hanno, quindi, due possibilità: $b=b_0$, costante nel tempo, per cui

$$M = M_0 e^{\mu t}, \quad B = B_0 e^{\mu t},$$

oppure, se la disuguaglianza è soddisfatta col segno forte, b decresce nel tempo fino a divenire nullo: il debito pubblico viene cioè rimborsato in un tempo finito⁶. Si ricava poi dalla (9bis) e dalla (8bis)

$$(14) \quad \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \mu - \nu,$$

⁵ Nel caso $\sigma = 0$ la condizione di trasversalità $\lim_{t \rightarrow \infty} m < \infty$ richiede $\mu \leq \nu + \alpha - \varrho$ (altrimenti dovrebbe essere $m_0 = 0$, cioè $p_0 = \infty$).

⁶ Una volta che b (e quindi B) è divenuto nullo, il sistema (1)-(9) si modifica perché scompaiono le variabili B e i (scompaiono le relazioni (8) e (3), essendo ora τ non più un dato ma una variabile). La dinamica delle altre variabili non risulta alterata, ma la pressione fiscale deve soddisfare la condizione $\tau = \gamma - \mu m_0$.

$$(15) \quad i = \mu + \varrho + (\sigma - 1)v,$$

per cui tasso di inflazione e saggio di interesse sono costanti nel tempo⁷. Si noti come il saggio d'interesse reale

$$i - \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \varrho + \sigma v$$

non dipenda dalle scelte del settore pubblico.

La relazione (12) determina il prezzo p_0 che si stabilisce al tempo iniziale t_0 a seconda della scelta del tasso di crescita μ della quantità di moneta da parte del settore pubblico: se la spesa pubblica viene finanziata con una maggiore crescita della quantità di moneta, allora, per l'ipotesi di razionalità intertemporale, subito si innalza il livello dei prezzi, oltre che il tasso di inflazione (relazione (14)).

La condizione (13) vincola il settore pubblico nella scelta di μ e $\tau - \gamma$. Per ogni $\tau - \gamma$ risulta determinato il tasso μ minimo, senza che il settore pubblico possa finanziare il disavanzo con una minore emissione di moneta ed una maggiore di titoli.

Si noti come la condizione di sostenibilità del debito pubblico sia tanto più stringente (nel senso che obbliga a valori di μ e τ più grandi) quanto più elevato è l'ammontare del debito pubblico iniziale B_0 . Ovviamente, la condizione (13) può non essere soddisfatta nella realtà corrente, potendo il settore pubblico scegliere nel breve periodo (fuori dalle ipotesi del modello) se finanziare il suo disavanzo con una maggiore emissione di moneta o di titoli; però nel lungo periodo, quando l'esperienza rende più razionale il comportamento del settore privato, essa tende ad imporsi e richiederà allora una inflazione e/o una pressione fiscale tanto più elevate quanto maggiore era stato nel passato il ricorso all'indebitamento.

La condizione di sostenibilità del debito pubblico è rappresentata

⁷ Nel caso $\sigma = 0$ si ottiene:

$$b = \frac{\tau - \gamma}{\varrho - v} + \frac{\mu m_0}{\alpha - \mu} e^{(\mu - v - \alpha + \varrho)(t - t_0)} + \left(b_0 - \frac{\tau - \gamma}{\varrho - v} - \frac{\mu m_0}{\alpha - \mu} \right) e^{(\varrho - v)(t - t_0)}$$

e la condizione di trasversalità $\lim_{t \rightarrow \infty} b e^{-(\varrho - v)(t - t_0)} = 0$ richiede $b_0 \leq \frac{\tau - \gamma}{\varrho - v} - \frac{\mu m_0}{\alpha - \mu}$, mentre la limitatezza del funzionale obiettivo impone $\alpha - \mu > 0$ e $\varrho - v > 0$. Si ha, inoltre, $\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \alpha - \varrho$. Se $\alpha - \mu = \varrho - v$, allora si ha $m = m_0$ e la condizione di sostenibilità del debito è analoga alla (13); se $\alpha - \mu > \varrho - v$, allora $\lim_{t \rightarrow \infty} m = 0$ e la condizione di sostenibilità del debito risulta più stringente.

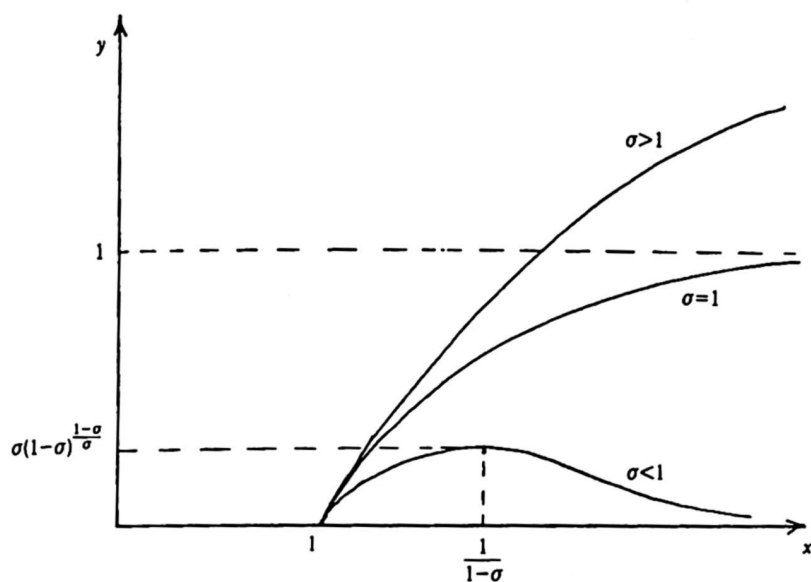


FIGURA 2.

nella figura 2, che mostra come un livello più elevato di b richieda, perché il debito sia sostenibile, una maggiore espansione monetaria o una maggiore imposizione fiscale.

Tenendo conto della (12) e della (13) si ottiene che

$$y \leq (x-1)x^{-\frac{1}{\sigma}}$$

ove

$$y = ((\varrho + (\sigma-1)\nu)b_0 + \gamma - \tau) \frac{Y_0}{C_0 \alpha^{\frac{1}{\sigma}}}, \quad x = \mu + \varrho + (\sigma-1)\nu,$$

che illustra come un più elevato b_0 richieda un più elevato τ e/o un più elevato μ (se $\sigma > 1$, entro certi limiti se $\sigma \leq 1$).

3. Un modello con titoli parzialmente liquidi

Si consideri ora un modello che differisce dal precedente solo perché il servizio di liquidità non è fornito soltanto dalla moneta ma anche, sebbene in minor misura, dai titoli del debito pubblico. Il servizio di liquidità dipende dalla quantità di moneta e di titoli secondo la relazione

$$L = \frac{M}{p} \left(1 + \eta \frac{B}{M} \right)^{\epsilon}$$

con $0 \leq \eta < 1$ e $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Per $\eta = 0$ e/o $\varepsilon = 0$ si ha il caso considerato precedentemente in cui soltanto la moneta fornisce il servizio di liquidità. I titoli del debito pubblico concorrono a fornire liquidità non tanto nel senso che essi stessi divengono mezzo di scambio⁸, quanto nel senso che il possesso di titoli invece che di capitale reale consente di detenere una scorta minore di moneta, potendo i titoli essere venduti più facilmente e con minori rischi di perdite.

Il sistema di relazioni individuato per il modello precedente rimane immutato tranne che per le equazioni (8bis) e (9bis), che vanno sostituite con le relazioni

$$(8\text{ter}) \quad i + \varepsilon \eta \alpha \left(\frac{C_0}{Y_0} \right)^\sigma m^{-\sigma} \left(1 + \eta \frac{b}{m} \right)^{-1 - (\sigma-1)\varepsilon} = \varrho + \sigma v + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt},$$

$$(9\text{ter}) \quad \alpha \left(\frac{C_0}{Y_0} \right)^\sigma m^{-\sigma} \left(1 + (1 - \varepsilon) \eta \frac{b}{m} \right) \left(1 + \eta \frac{b}{m} \right)^{-1 - (\sigma-1)\varepsilon} = \varrho + \sigma v + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$$

Siccome il sistema (1bis), (4bis), (8ter), (9ter) è alquanto complesso, viene analizzato soltanto il caso in cui $\sigma = 1$. In questo caso⁹, l'equazione (1bis), tenendo conto delle (8ter) e (9ter), diviene

$$(16) \quad \frac{dm}{dt} + \frac{db}{dt} = \gamma - \tau - \alpha \frac{C_0}{Y_0} + \varrho (m + b),$$

la cui soluzione è

$$m + b = \left(m_0 + b_0 - \frac{\tau - \gamma}{\varrho} - \frac{1}{\varrho} \alpha \frac{C_0}{Y_0} \right) e^{\varrho(t-t_0)} + \frac{\tau - \gamma}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \alpha \frac{C_0}{Y_0}.$$

Le condizioni di trasversalità $\lim_{t \rightarrow \infty} m < \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} b e^{-(i-v-\frac{1}{p}\frac{dp}{dt})(t-t_0)} = 0$ richiedono (tenuto conto della (8ter)) che

⁸ Questo caso può peraltro presentarsi non solo in forma episodica, limitata a poche rilevanti transazioni, ma anche in forma diffusa, fino a determinare l'assimilazione dei titoli con la moneta: così accadde con gli assegnati in Francia nel periodo della Convenzione.

⁹ Con $\sigma = 1$, la funzione istantanea di utilità inclusa nel funzionale obiettivo assume la forma logaritmica lineare

$$\log C + \alpha \log L.$$

$$m_0 + b_0 \leq \frac{\tau - \gamma}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \alpha \frac{C_0}{Y_0}.$$

Si assuma che questa condizione venga soddisfatta con il segno di uguaglianza (che è il caso peggiore al fine della sostenibilità del debito pubblico)¹⁰. Si ha

$$(17) \quad m_0 + b_0 = \frac{M_0 + B_0}{p_0 Y_0} = \frac{\tau - \gamma}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \alpha \frac{C_0}{Y_0},$$

e quindi $m + b = m_0 + b_0$, costante nel tempo. Tenuto conto di questa soluzione e della (9ter), la (4bis) diviene

$$\frac{dm}{dt} = (\mu + \varrho) m - \alpha \frac{C_0}{Y_0} + \varepsilon \eta \alpha \frac{C_0}{Y_0} \frac{m_0 + b_0 - m}{(1 - \eta)m + \eta(m_0 + b_0)},$$

il cui diagramma di fase è rappresentato nella figura 3.

Allora, la condizione di trasversalità $\lim_{m \rightarrow \infty} m < \infty$ e quella per cui p non deve divenire infinito in un tempo finito richiede $m = m_0$, costante nel tempo, con m_0 che soddisfa la relazione

$$(18) \quad (\mu + \varrho) m_0 - \alpha \frac{C_0}{Y_0} + \varepsilon \eta \alpha \frac{C_0}{Y_0} \frac{b_0}{m_0 + \eta b_0} = 0.$$

Le condizioni (17) e (18) impongono

$$p_0 = (\varrho + \mu) \frac{M_0}{\alpha C_0} \frac{M_0 + \eta B_0}{M_0 + (1 - \varepsilon) \eta B_0},$$

¹⁰ Se la disuguaglianza venisse soddisfatta con il segno forte, allora b raggiungerebbe in un tempo finito (indicato con t_1) il valore nullo. A partire da questo tempo l'equazione (4bis), tenuto conto della (9ter) e del fatto che $b = 0$, diviene

$$\frac{dm}{dt} = (\mu + \varrho) m - \alpha \frac{C_0}{Y_0},$$

la cui soluzione, sotto le consuete condizioni, è

$$m = m_1 = \frac{1}{\mu + \varrho} \alpha \frac{C_0}{Y_0},$$

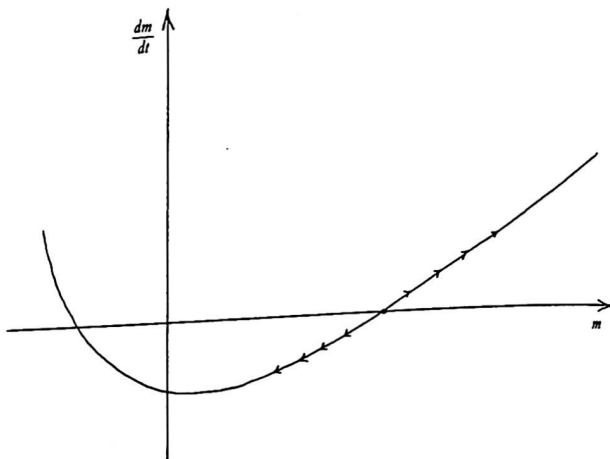


FIGURA 3.

$$\frac{\varrho + \mu}{\varrho} \left(\tau - \gamma + \alpha \frac{C_0}{Y_0} \right) = \alpha \frac{C_0}{Y_0} \frac{M_0 + B_0}{M_0} \frac{M_0 + (1 - \varepsilon) \eta B_0}{M_0 + \eta B_0}$$

che determinano il livello iniziale del prezzo e il vincolo di sostenibilità del debito pubblico.

Si noti come p_0 sia più elevato che nel caso in cui $\eta=0$ e/o $\varepsilon=0$ mentre il vincolo di sostenibilità del debito risulta un po' meno stringente.

Per il tasso di inflazione si ha

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \mu - v,$$

mentre per il tasso di interesse reale sui titoli risulta

$$i - \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \varrho + v - (\varrho + \mu) \varepsilon \eta \frac{M_0}{M_0 + (1 - \varepsilon) \eta B_0}$$

inferiore che nel caso con $\eta=0$ e/o $\varepsilon=0$. Si noti, rispetto a questo caso, come la maggiore perdita subita nel tempo iniziale dal settore privato per il maggiore aumento del prezzo sia uguale al valore attua-

le del minore flusso di imposte consentito dalla minore costrizione posta dalla condizione di sostenibilità del debito ¹¹.

4. Conclusioni

I due modelli presentati in precedenza determinano simultaneamente sia la dinamica delle grandezze reali che di quelle monetarie e di finanza pubblica. L'ipotesi di razionalità intertemporale del settore privato determina l'indipendenza della dinamica delle grandezze reali dalla politica di finanziamento della spesa pubblica. Infatti, la razionalità intertemporale implica l'effetto Ricardo-Barro. La dinamica delle grandezze reali (cioè del capitale reale, del consumo, della produzione e della spesa pubblica) risulta, nei modelli esaminati, analoga a quella dei modelli di crescita ottima, è cioè una dinamica instabile (rappresentata da un punto di sella), la cui convergenza verso la crescita a tasso costante viene ottenuta, per l'ipotesi di razionalità intertemporale, obbligando il consumo iniziale ad assumere quel valore che situa l'economia sull'unico sentiero convergente. La dinamica delle grandezze monetarie e finanziarie (cioè della quantità di moneta, del debito pubblico, delle imposte, del prezzo e del tasso d'interesse sui titoli) risulta anch'essa instabile (rappresentata da un nodo divergente nel piano di fase di assi m e b), compatibile con razionali condizioni di trasversalità solo se il prezzo al tempo iniziale si situa al livello opportuno (tanto più elevato quanto maggiore è il debito pubblico esistente) e il tasso di crescita della quantità di moneta e/o la pressione fiscale soddisfano una condizione, denominata di sostenibilità del debito pubblico, che è tanto più stringente quanto più elevato

¹¹ Se si trascura la razionalità intertemporale che determina il livello iniziale del prezzo e si ritiene questo un dato, allora la relazione (1bis), con $\frac{dm}{dt} = 0$ e $\frac{db}{dt} = 0$, e la

$$m_0 \left(1 + \eta \frac{b_0}{m_0} \right)^\varepsilon = \frac{L_0}{Y_0},$$

ove L_0 è ora dato, determinano la condizione di sostenibilità del debito seguente

$$\frac{\gamma - \tau + \left(i - v - \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \right) b_0}{v + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}} \left(1 + \eta \frac{\left(v + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \right) b_0}{\gamma - \tau + \left(i - v - \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \right) b_0} \right)^\varepsilon = \frac{L_0}{Y_0},$$

che è più stringente nel caso $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ che in quello $\varepsilon = 0$ e/o $\eta = 0$ se appena $\frac{b_0}{m_0}$ è sufficientemente elevato in modo che $i - v - \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$ (determinato dalla (8ter)) sia sufficientemente prossimo a ρ [Cfr. Montesano 1986, 400-407].

è il debito esistente. Se questa condizione non fosse soddisfatta (ossia se il disavanzo venisse finanziato con emissione di titoli più di quanto la condizione consenta), allora il debito pubblico tenderebbe a crescere ad un tasso pari al tasso d'interesse e il valore attuale del debito finale sarebbe positivo, denotando così la non rimborsabilità del debito. Mentre nel modello in cui i titoli sono illiquidi il loro tasso d'interesse reale coincide con quello sul capitale reale (pari alla somma fra il saggio di preferenza temporale e quello di crescita moltiplicato per l'elasticità dell'utilità marginale), in quello in cui i titoli contribuiscono a fornire liquidità il loro tasso d'interesse reale è inferiore (però tanto meno inferiore quanto maggiore è l'indebitamento pubblico). L'ipotesi di razionalità intertemporale su cui questi modelli sono fondati determina il livello iniziale del prezzo in relazione alla politica monetaria (rappresentata dal tasso di crescita della quantità di moneta) e questo è, nel caso in cui i titoli contribuiscono alla liquidità, più elevato quanto maggiore è il debito pubblico. Se l'ipotesi di razionalità intertemporale venisse indebolita, allora questo effetto non sarebbe più istantaneo ma si manifesterebbe nel tempo, come un ulteriore incremento del tasso di inflazione.

Naturalmente, l'ipotesi di razionalità intertemporale e l'estrema semplificazione dei modelli analizzati non consentono di interpretare con essi la realtà, se non per grandi linee. Forse l'indicazione più rilevante offerta da questi modelli consiste nella determinazione (espressa dalla condizione di sostenibilità del debito) dell'influenza che il debito pubblico ha sul disavanzo pubblico e sulla espansione monetaria: quanto maggiore è il debito pubblico tanto maggiore risulta dover essere, *ceteris paribus*, l'imposizione fiscale e/o la crescita della quantità di moneta (la quale però eleva non solo il tasso di inflazione di lungo periodo, ma anche subito la velocità di circolazione della moneta innalzando quindi ulteriormente il livello dei prezzi). Questi risultati sono in accordo con le tesi sostenute dalla letteratura economica al riguardo. I due modelli discussi in questo lavoro non solo confermano questa tesi, ma indicano anche una via che consente l'analisi del problema in un quadro teorico di equilibrio generale, in cui tutte le variabili economiche vengono determinate simultaneamente.

Riferimenti bibliografici

- Buiter, W. (1985), *A Guide to Public Sector Debt and Deficits*, in «Economic Policy», pp. 13-79.
 Intriligator, M.D. (1971), *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Englewood Cliffs (N.J.), Prentice Hall, pp. 398-416.
 Montesano, A. (1986), *Debito pubblico e tasso di inflazione*, in «Ricerche Economiche», pp. 400-407.