

## 6. Scienze naturali e scienze sociali. Le chiose matematiche di Frisi a Verri e Lloyd di Luigi Luini

### 1. Premessa

Le *Meditazioni sull'economia politica* di Verri e l'*Essay on the Theory of Money* di Lloyd furono dati alle stampe nel 1771. Alla sesta edizione (1772) dell'opera del Verri furono aggiunte varie note matematiche alla fine di parecchi capitoli e in appendice un *Estratto del saggio sulla teoria della moneta del generale Lloyd*. Sia le note che l'estratto – ascritte all'opera del famoso matematico Paolo Frisi [G.B. Venturi 1773; Custodi 1804, parte moderna, tomi XV e XVII] – furono ed ancor sono oggetto di doviziose analisi tanto da essere lette come l'osatura della matematica della determinazione del prezzo secondo la «Milanese School» [Theocharis 1961, cap. 4]. Il Frisi – al tempo divenuto il centro di una vera e propria rete cosmopolita di corrispondenza e di scambi [F. Venturi 1958], in questo lavoro non solo tradusse in linguaggio matematico, analizzandone le differenze, le opere di Verri e di Lloyd, ma fornì una formulazione sua propria sia per quanto riguarda la matematica della determinazione del/i prezzo/i sia per quanto concerne il saggio di aritmetica economico-politica sintetizzato nella tabella dell'ultimo capitolo della *Theory of Money* di Lloyd.

In particolare il Frisi mise in luce la differenza tra la formazione del prezzo di una merce «qualsiasi» e la formazione del prezzo della merce «universale» (o moneta).

Il principio che sta alla base di questa distinzione trovò applicazione nelle modalità di misurazione della forza «assoluta» delle nazioni, per la quale il Frisi suggerì una correzione sia della teoria che dei valori numerici presentati dal Lloyd.

Il lavoro è così articolato: dapprima viene tratteggiato il ruolo di Frisi nell'ambiente scientifico dei lumi (par. 2). Nel par. 3 si discute

*L'autore ringrazia Roberto Romani per la preziosa consulenza bibliografica, Marco Bianchini e Marco Guidi per gli utili commenti.*

della portata delle sue note e della appendice al Verri; il prezzo dei beni, il valore della moneta e le loro correlazioni con la ricchezza nazionale vengono analizzate nel paragrafo 4. Si discute infine (par. 5) dell'influenza che le formulazioni del Frisi ebbero sul dibattito circa l'uso della matematica in economia. Un'appendice ripropone le sue note all'opera del Verri.

## 2. Scienze naturali e scienze sociali, teoria e applicazione

Due tratti tipici dell'opera di Frisi colpiscono l'attenzione dell'economista che si provi a studiare la sua figura di rappresentante dei «lumi».

Da un lato quello di divulgatore delle scienze matematiche e fisiche e delle scienze applicate che da esse si dipartono, da questo punto di vista appare immediatamente in netta evidenza il suo spirito positivo: egli rappresenta, infatti, uno dei principali diffusori del newtonismo in Italia.

Da un altro quello di storico della scienza evidenziato chiaramente attraverso lo strumento letterario, ai tempi assai in uso, degli elogi (Cavalieri, Galileo, Newton, D'Alembert).

Questi due elementi rilucono particolarmente quando si avvicina la sua attività manualistica relativa alle scienze naturali al significato che lo sviluppo storico della scienza e della sua diffusione ha riguardo ai progressi della società.

L'attività del Frisi come insegnante lo ha portato alla stesura di diversi lavori di matematica-fisica teorica.

Per quanto riguarda gli sviluppi della matematica contemporanea il Frisi segue – nell'esposizione dei principi del calcolo differenziale – il Maclaurin del *Treatise of Fluxions* (Edimburgo, 1742). Secondo un tale approccio si perviene alla seguente definizione di moto uniforme: con moto uniforme bisogna intendere quel moto che si realizza nel punto in cui una retta è tangente ad una data curva (moto uniforme che diviene tale nel momento in cui una forza, che opera istante per istante, cessa di agire).

Come si può chiaramente vedere un tale punto di vista ha notevole rilievo sia sul piano matematico che su quello fisico. Inoltre il Frisi, proprio in quanto conoscitore sia del dibattito matematico<sup>1</sup> che si sviluppa al suo tempo in Europa sia della storia della scienza la

<sup>1</sup> È stata tuttavia notata una sua manchevolezza nella conoscenza dell'opera di Lagrange [Di Sieno e Galuzzi 1987, 57, n. 31].

quale ricerca nel passato le condizioni scientifico-tecniche del tempo presente, perviene ad una posizione che lo porta a cogliere la continuità tra il «nuovo» calcolo differenziale (di Newton-Leibnitz) ed il «vecchio» metodo degli indivisibili<sup>2</sup>.

Egli concepisce la matematica come una scienza a priori la quale deve evitare l'uso di strumenti estranei al suo bagaglio concettuale, quali ad esempio gli «immaginari»: in questo la sua trattazione presenta una notevole diversità rispetto a quella di Eulero, il quale invece propone una verifica quasi sperimentale – cioè a posteriori – delle possibilità di estensione delle regole valide per i numeri reali ai numeri immaginari.

In particolare va rilevato il suo esplicito allontanarsi da Eulero sul seguente punto decisivo: mentre secondo Eulero un numero reale e positivo ammette infiniti logaritmi, di cui uno solo reale, diversamente da un numero negativo che ne ammette infiniti, ma tutti immaginari, secondo Frisi i numeri complessi non possono mai costituire un ampliamento dei numeri reali: tale fatto lo porta a respingere la eguaglianza  $0 = 0i$ <sup>3</sup>, e di necessità ad evidenziare una completa separazione tra il mondo dei numeri reali e quello degli immaginari. Il Frisi contrappone così al metodo algebrico la costruzione geometrica delle equazioni, ma in tal modo appare esplicitamente come «al purista che tiene al primato della geometria (sia pur analitica) sull'algebra si contrappone il pratico che è in effetti disinteressato alle eccessive sottigliezze teoretiche» [Brigaglia 1987, 93-94]. Tali eccessive sottigliezze potrebbero infatti portare a quel «pirronismo» degli scettici, rispetto al quale il Frisi nutrì una netta avversione.

Pare quindi ragionevole inquadrare gli interessi matematici del Frisi all'interno di quell'intimo collegamento che egli vuole stabilire tra discipline astratte e discipline applicate: egli ritiene cioè che la matematica debba di necessità avere un utilizzo nelle scienze pratiche, fornendo per tali scienze sia risultati utili sia certezze anche se talvolta approssimate.

Un ulteriore approfondimento dell'approccio di Frisi alle scienze

<sup>2</sup> «Frisi non opera una chiara distinzione fra quelli che potremmo oggi definire i problemi elementari degli isoperimetrici ed i veri e propri problemi del calcolo delle variazioni» [Di Sieno e Galuzzi 1987, 51]. Questa posizione che non muta nel corso degli anni avrà rilevanza, come si vedrà più oltre, per una sua applicazione in economia.

<sup>3</sup> «Come è noto la questione dello status logico ed ontologico della nozione di numero complesso si risolverà identificando non solo  $0 = 0i$ , ma più in generale  $a + 0i = a$ , vedendo quindi i reali come un caso particolare di numeri complessi». [Brigaglia 1987, 89-90].

naturali che presenta interessi per lo scienziato sociale è quello che deriva dall'analisi di alcuni dei suoi studi di fisica, in particolare di geodetica. Nel *De gravitate* tra le due possibili spiegazioni dello schiacciamento terrestre: 1) quella *geometrica* che assume fondamentalmente l'assimilazione ad una forma ellissoidica, e 2) quella *dinamica* che deriva dall'accelerazione della gravità la forma della terra ma nella quale, per la spiegazione dello schiacciamento, occorre introdurre l'ipotesi che il pianeta – in tempi remoti fluido – in seguito abbia presentato un processo di sedimentazione delle sostanze secondo un ordine di densità decrescente verso l'esterno, il Frisi preferì l'approccio geometrico il quale si accorda con l'ipotesi di una terra solida *ab aeterno*<sup>4</sup>.

### 3. Contributo alla teoria economica

Una volta accolto come dato il problema delle terre emerse sul globo diviene possibile mettere in collegamento le scienze fisiche con quelle sociali. L'occasione può essere colta negli elementi di quella che un economista contemporaneo denomina con il termine di teoria della crescita e della popolazione, elementi che il Frisi presenta nell'estratto sul saggio di Lloyd posto in appendice alla VI ed. delle *Meditazioni* del Verri.

Nel riprendere l'ipotesi di un sistema economico senza «merce universale» o «generale circolazione» o di puro baratto [Lloyd 1771, 29-34], egli analizza il modo nel quale la natura determina la fertilità naturale e per questa via l'entità della popolazione.

Se si ipotizza che il numero di abitanti sia in relazione alla fertilità naturale, relazione determinata dalla equidistanza tra poli (freddi e secchi) ed equatore (caldo e umido), tale fertilità naturale sarà massima in corrispondenza delle zone temperate nelle quali si realizza una giusta mistura tra freddo/caldo e secco/umido. E poiché la massima estensione di terre emerse si ha, in corrispondenza di quelle aree temperate, presso le parti più fruttifere dell'Asia, quelle zone costituiranno, sulla base della sola fertilità naturale, l'area più popolata del globo.

Quando tuttavia si passi dall'economia di baratto a quella di scam-

<sup>4</sup> Sulla precessione e nutazione degli equinozi, con il connesso problema della formazione delle maree e la polemica fra Frisi e gli astronomi di Brera si veda: Tagliaferrì e Tucci [1987].

bio ed intervenga l'industria<sup>5</sup> (e di necessità la circolazione del denaro) la fertilità naturale diviene la «facilità di sussistere». E quest'ultima deve di necessità essere rappresentabile attraverso la «capacità di cambiare una comodità con l'altra [la quale] a sua volta dipende dalla quantità di circolazione del denaro o delle cedole equivalenti».

Risulta così come un'economia naturale (o di baratto) si distingua da una economia evoluta nella quale sia possibile scambiare merci «qualsiasi» attraverso la merce «universale».

#### 4. Prezzo dei beni, valore della moneta e forza (assoluta e relativa) di una nazione

L'epoca nella quale furono pubblicati questi lavori<sup>6</sup> si prestava – come si è visto per il caso di Frisi – ad una diffusione dell'uso della matematica nelle scienze sociali. In proposito il dibattito, allora in modo non tanto dissimile da oggi, non si incentrava tanto sul fatto se la matematica fosse atta ad esprimere le relazioni economiche, quanto su quale strumento analitico fosse più adatto a combinarsi con i concetti economici.

È forse per questo motivo che a Frisi indicato come *l'editore*, Verri lasciò la responsabilità delle note che questi appose al suo testo e soprattutto dell'*Estratto*, dell'ampia recensione che egli finì col consacrare all'*Essay* e che fu inserita in appendice a questa sesta edizione delle *Meditazioni* [F. Venturi 1978, 581]. Proprio a questa edizione il Verri aggiunge una nuova prefazione nella quale dice: «l'economia politica mi par vicina a diventare scienza; mancavi soltanto quel metodo e quella organizzazione di teoremi che gliene dia la forma» [Verri 1772, 4].

La portata analitica delle note del Frisi, pur essendo già stata considerata [Theocharis 1983; Cova 1987], probabilmente consente qualche ulteriore approfondimento<sup>7</sup>.

<sup>5</sup> L'analogia tra fisica ed economia viene così stabilita dal Frisi: «che la concorrenza e l'urto reciproco e libero, come accresce nei corpi elastici la quantità del moto, così nei corpi politici accresce sempre l'industria e la ricchezza; che il prezzo di tutti i generi è un risultato aritmetico della quantità dei generi stessi e del numero dei compratori e dei venditori» [*Elogio a Maria Teresa*, in F. Venturi 1958].

<sup>6</sup> Sui legami tra matematica ed economia nel Settecento in Italia si veda Bianchini [1982; 1987].

<sup>7</sup> In appendice si sono riportati i passi più significativi delle Note, data la relativa non facilità di reperimento; si è invece tralasciato l'*Estratto*, di più facile reperibilità per il lettore.

Il Frisi tende a mettere in luce le diversità nel contributo fra i due autori<sup>8</sup>.

Il punto di partenza del Verri è la condizione di equilibrio di una merce «qualsiasi»: infatti «l'autore italiano suppone data la quantità e la circolazione del denaro, data la quantità e il bisogno della merce, e pari tutte le altre circostanze», e perciò varrà la:

$$[1] \quad P = \frac{C}{V}$$

dove  $C$ : numero compratori,  $V$ : numero venditori,  $P$ : prezzo di una merce «qualsiasi».

Per il Lloyd il punto d'inizio è dato dalla condizione di equilibrio per la merce «universale»: «l'autore inglese considera la sola variazione del prezzo che può venire dalla variazione della massa circolante e della quantità delle merci», che sarà esprimibile attraverso la:

$$[2] \quad P = \frac{Q}{M}$$

dove:  $Q$ : massa circolante,  $M$ : quantità merci (insieme merci qualsiasi),  $P$ : prezzo della merce «universale».

Nel caso in cui  $y$ : variazione di  $M$ ; e:  $yM$ : nuova quantità merci varrà la:

$$[2'] \quad yP = \frac{Q}{\frac{M}{y}}$$

Va tuttavia rilevata una notevole differenza tra il significato che occorre connettere al termine  $P$  nell'equazione [1] alla Verri rispetto alle due equazioni [2] e [2'] alla Lloyd.

Nella [1] il prezzo di una «singola» merce «qualsiasi» varia — ferma restando la quantità complessiva prodotta di «quella» merce «qualsiasi» — al variare o del numero dei compratori, fermo restando il numero dei venditori, o di quello dei venditori, fermo restando il numero dei compratori.

<sup>8</sup> Che, ricorda il Frisi [1773, 369], «si sono amati e stimati sempre moltissimo».

Nella [2], invece, il prezzo dell'«insieme» di mercanzie «qualsiasi» varia, fermo restando il numero sia dei compratori che dei venditori, e fermo restando la massa circolante, al variare dell'offerta «aggregata» (cioè della massa determinata dalla quantità) dell'insieme delle mercanzie.

Quindi la  $P$  di Verri rappresenta il prezzo di una singola merce, e le variazioni che ne conseguono sono causate dal variare del numero di compratori e venditori, mentre la  $P$  di Lloyd rappresenta il prezzo dell'insieme delle merci, e la sua variazione (che oggi si denomina variazione nel livello generale dei prezzi) al variare della massa prodotta.

In proposito il Ferroni [1796, 387] così distingue l'approccio alla Verri da quello alla Lloyd (che deriva indirettamente dal sunto del Frisi). Mentre secondo il Verri l'abbondanza apparente è misurata dal numero dei venditori<sup>9</sup>, secondo il Lloyd l'elemento rilevante è invece costituito dalla massa apparente determinata cioè dall'offerta aggregata e non già dal numero dei venditori.

Tuttavia se risulta essere diversa la proporzione relativa ad alcune merci «particolari» rispetto a quella relativa alla massa dell'insieme di merci «particolari» rappresentabili attraverso la merce «universale» (o massa circolante), occorrerà tenere distinti i due ordini diversi di cause relative alla variazione del prezzo che per comodità si denominano rispettivamente alla Verri e alla Lloyd.

In proposito il Frisi propone di «comporre insieme le due generali formule [...] con un'altra ancora più generale», che si può denominare condizione di equilibrio alla Frisi, che ha la funzione di unificare la condizione di equilibrio alla Lloyd con la condizione di equilibrio alla Verri. L'equazione proposta è la:

$$[3] \quad P = \frac{C \cdot Q}{M \cdot V}$$

«Cioè i prezzi generalmente parlando sono in ragione composta, della diretta semplice del numero de' compratori e della quantità del-

<sup>9</sup> Il Theocharis sottolinea la differenza tra l'edizione delle *Meditazioni* del Verri del 1781 «l'abbondanza apparente [...] prossimamente si misura col numero dei venditori» e le edizioni precedenti: «l'abbondanza apparente si misura col numero dei venditori». Lo stesso autore mette in luce gli elementi di teoria del monopolio [Theocharis 1983, 47, n. 26] e di teoria dell'oligopolio [*ibidem*, 152-154] contenuti nell'opera del Verri.

la circolazione, e della semplice inversa del numero de' venditori e della quantità della merce o manifattura» [Frisi 1772, 377].

Tuttavia il Frisi tralascia di approfondire le possibili condizioni di in(inter) dipendenza tra le quattro variabili per passare invece allo studio di quel particolare «prezzo che si dà per l'uso di una certa somma per un certo tempo» nell'ipotesi di Verri [*ibidem*, 92] e nell'ipotesi di Lloyd [*ibidem*, 378].

Se si segue il Verri si avrà la:

$$[4] \quad I = \frac{R}{O}$$

dove: *I*: interesse denaro, *R*: ricerca denaro (quantità), *O*: offerta denaro (quantità).

Mentre se si segue il Lloyd si avrà la:

$$[5] \quad I = \frac{B}{O}$$

dove: *I*: interesse denaro, *B*: numero domandanti prestito, *O*: numero offerenti prestito.

In questo caso il termine che viene utilizzato con due diversi significati risulta essere *O*, che nell'equazione Verri rappresenta la quantità (o massa) di denaro offerta, mentre nell'equazione Lloyd rappresenta il numero degli offerenti.

La formazione dell'interesse appare quindi in un approccio alla Verri essere determinata dalla massa di ricerche e di offerte, mentre in un approccio alla Lloyd dal numero degli offerenti e dei domandanti. Questi due metodi – sulla formazione del prezzo sul mercato dei prestiti – vengono così ad essere speculari rispetto ai metodi di formazione del prezzo sul mercato delle merci.

Sfortunatamente il Frisi non si è spinto così in là sino a comporre per il mercato dei prestiti le equazioni [4] e [5] in una più generale formula che avrebbe potuto rappresentare sul versante monetario ciò che la [3] rappresenta sul mercato reale. Avrebbe infatti in tal modo scoperto sotto quali condizioni l'industria in un approccio alla Verri (rappresentabile «colle semiordinate di una iperbole tra gli Assintoti, le cui ascisse fossero le distanze degli uomini tra di loro» [Verri 1772, 266, si veda fig. 2]), può essere ricondotta all'industria in un approccio alla Lloyd, che è data invece dal rapporto tra circolazione e popolazione [Lloyd 1771, 156].

Ancora una volta, nel criticare la tabella del Lloyd – il quale ave-

va misurato la forza «assoluta» di una nazione attraverso la somma dei due suoi componenti (Popolazione + Tasse) – il Frisi riprende e sviluppa l'analogia economia/fisica in relazione al concetto di forza. «In tutte le cose che influiscono le une sulle altre, succede come nella quantità del moto e nell'impeto de' corpi, che non si misura dalla somma, ma bensì dal prodotto della massa e della velocità» [Frisi 1772, 382-383]. Il Frisi suggerisce così che per misurare la diversa forza «assoluta» delle nazioni occorre «prendere e paragonare tra loro non già le somme ma i prodotti delle quantità delle tasse e della popolazione» [*ibidem*, 382].

Sostanzialmente senza commenti del Frisi è invece l'altro indicatore del Lloyd, cioè quello relativo alla misura della forza «relativa» di una nazione.

Distinguendosi dal «celebrato Montesquieu» – il quale suppone che la tassazione cresca al crescere della libertà – il Lloyd [1771, 144-145] sostiene che mentre la «massa» della tassazione cresce al crescere della circolazione, che per Lloyd è sinonimo di libertà, e per questa via contribuisce all'incremento della forza «assoluta», la forza «relativa», misurata dal rapporto tra circolazione e tasse [*ibidem*, 156, ultima colonna della tabella], risulta invece inversamente correlata all'incidenza fiscale<sup>10</sup>.

Il Frisi, sia nelle note che nell'estratto tralascia del tutto di affrontare il problema della valutazione della forza «relativa» di una nazione per ottenere la quale è indispensabile misurare la proporzione tra forza «assoluta» e gettito fiscale. La causa di tale mancanza va probabilmente ritrovata nel modo in cui il Frisi affronta il problema posto da Verri nel par. XXI, cioè attraverso l'utilizzo del metodo isoperimetrico invece di quello della massimizzazione sotto vincolo. Infatti quando si voglia, seguendo il Verri: «data la quantità di riproduzione ottenerla col minimo travaglio» oppure «data la quantità del travaglio ottenere la massima riproduzione», si incorre – attraverso il metodo isoperimetrico – in una sostanziale difficoltà. Mentre infatti nel secondo caso («data la quantità del travaglio ottenere la massima riproduzione») può nel contempo aumentare la massa della tassazione e diminuire l'incidenza, aumentando così la forza «relativa» nel senso di Lloyd, nel primo caso («data la quantità di riproduzione ottenerla col minimo travaglio») tale obiettivo risulta non perseguibile.

Tra le recensioni che seguirono l'apparire di questa ampliata edi-

<sup>10</sup> «Pertanto concludo che – contrariamente all'opinione di Montesquieu – sotto un libero governo i soggetti pagano *relativamente* meno (tasse) che sotto una monarchia assoluta» [Lloyd 1771, 159].

zione la più notevole<sup>11</sup> per portata d'argomenti è quella di G. B. Venturi [1773] professore di Matematica e Filosofia all'Università di Modena.

Su un punto pare particolarmente centrata la recensione e cioè su come occorrerà rappresentare analiticamente il caso in cui nella equazione [1.1] si faccia «variare senza alcuna legge tanto la  $C$  quanto la  $V$ . In tal caso il luogo dell'equazione [...] dovrà essere una superficie curva d'un solido tale che venendo tagliata sotto la direzione di uno dei tre assi con un piano perpendicolare alla base la sezione sia sempre un'iperbola tra gli asintoti, e tagliato con il piano normale al primo, la comune sezione di esso piano e della superficie curva, dia sempre una linea retta inclinata al piano della base» [Venturi 1773, 243]. Contributo quest'ultimo assai notevole in quanto rappresenta il primo suggerimento per l'uso della geometria nello studio delle funzioni a tre variabili [Theocharis 1983, 33].

## 5. Conclusioni

In questo secondo dopoguerra è ripreso il dibattito sulle origini dell'uso della matematica in economia<sup>12</sup>, ed è curioso notare come si sia ispessito il contributo analitico rispetto alle riprese che di quei contributi si erano avute in Italia negli anni trenta<sup>13</sup>. Probabilmente la spiegazione di tale fenomeno può essere in modo meno insoddisfacente ritrovata qualora si ripercorra il tortuoso sentiero di sociologia della conoscenza (e quindi di una comunità scientifica che si interroga sul significato, sull'uso e sulla diffusione dello strumento matematico – e, nel caso di Frisi delle analogie tra fisica ed economia), piuttosto che se ci si muove su di una lineare ricostruzione delle sedimenta-

<sup>11</sup> Non si considerano qui né quelle contrarie quali l'*economia stercoraria* attribuita a Carli [F. Venturi 1978] e le *osservazioni* anomime stampate a Lucca nel 1774; né quelle favorevoli, quale quella comparsa sulle *Effemeridi letterarie*, poiché il loro contributo analitico risulta poco consistente.

<sup>12</sup> Robertson [1949], citazione su Frisi pp. 526-527, Bousquet [1958] p. 125 e n. 10, Theocharis R. D. [1<sup>a</sup> ed. 1961], [2<sup>a</sup> ed. 1983, cap. 4, «The Milanese School»], Bianchini [1982].

<sup>13</sup> I contributi di Fasiani [1937] che in appendice riporta le note di Frisi alle *Meditazioni* del Verri, e di Einaudi [1938, 185]: «l'abate Frisi aveva reso all'amico Verri un cattivo servizio traducendo in una formuletta», non costituiscono un reale progresso nello spiegare le cause della diffusione nel secondo cinquantennio del Settecento dell'economia matematica e della sua repentina contrazione nella prima metà dell'Ottocento.

zioni del pensiero passato atte alla edificazione dei singoli elementi fondamentali su cui è basata la teoria economica contemporanea.

Da questo punto di vista il contributo di Paolo Frisi, forse proprio per i limiti della propria indagine, costituisce uno dei momenti più rilevanti, almeno per il suo tempo, di stabilire quel legame conoscitivo tra le scienze naturali e le scienze sociali che oggi pare così lontano.

## Appendice

Le *Note dell'Editore* di Frisi alla sesta edizione delle *Meditazioni* [Frisi 1772] sono relative ai seguenti paragrafi e trattano i seguenti temi.

Al par. 4 *Principj motori del Commercio e Analisi del prezzo* [*ibidem*, 37-39 e 242-243].

Se si denomina con  $P$  il prezzo di un bene qualsiasi («merce particolare») in un momento in cui il numero dei venditori è  $V$  e il numero dei compratori  $C$ , e con  $p$  il prezzo in un secondo momento quando il numero dei venditori è  $v$  e quello dei compratori  $c$ , la relazione tra i due prezzi sarà data dalla:

$$[A.1] \quad P: p \frac{C}{V} : \frac{c}{v}$$

il Frisi passa poi ad esaminare il caso in cui la relazione tra il prezzo ed il numero dei compratori e dei venditori assuma la forma della:

$$[A.2] \quad P = \frac{M(C + A)^m}{(V + B)^n}$$

dove:  $M, A, m, B, n$  costanti e  $M, m, n > 0$ ; ed  $A$  e  $B$  qualsiasi cioè  $>, =, < 0$ .

Se nella [A.2] si pone  $C = 0$ , affinché  $P = 0$  occorre che anche  $A = 0$ .

Se sempre nella [A.2], dato al tempo stesso il numero dei compratori, cioè  $C = \bar{C} = \text{cost.} > 0$ , se non vi debbono essere venditori, se cioè  $V = 0$ , affinché  $P \rightarrow +\infty$  crescendo così senza un limite superiore finito, è necessario che  $B \rightarrow 0^+$ .

Nelle parole del Frisi: «Poiché dato il numero de' compratori, e non essendovi alcun venditore, il prezzo contrattabile dovrà crescere

oltre qualunque limite, è inoltre manifesto che sarà [...]  $B = 0$ » [*ibidem*, 38].

Sulla base di tali argomentazioni è possibile ridurre la [A.2] alla:

$$[A.3] \quad P = \frac{C^m}{V^n}$$

la quale fa sì che la [A.1] sia trasformabile nella:

$$[A.1'] \quad P: p = \frac{C^m}{V^n} : \frac{c^m}{v^n}$$

In questa equazione, dato il numero dei venditori ( $V \geq 0$ ), se il numero dei compratori cresce senza limite cioè se  $C \rightarrow +\infty$  anche  $p \rightarrow +\infty$ , con la condizione aggiuntiva che i due infiniti siano dello stesso ordine.

Quindi ponendo  $m = 2$  il prezzo diviene un infinito di secondo ordine, mentre se si pone  $m = 1/2$  oppure  $m = 1/3$ , ecc., il prezzo di necessità deve essere espresso attraverso un infinito radicale, «le quali supposizioni non sembrano verosimili», conclude il Frisi [*ibidem*, 38].

Nella stessa equazione, dato il numero dei compratori ( $C \geq 0$ ) se il numero dei venditori cresce senza limite cioè se  $V \rightarrow +\infty$ ,  $p \rightarrow 0^+$  e deve costituire un infinitesimo di primo ordine. E quindi — concludeva il Frisi — affinché la [A.1'] abbia significato economico occorre che  $m$  ed  $n$  «non differiscano molto dall'unità» [*ibidem*, 38].

Ancora si potrebbe esprimere l'equazione del prezzo attraverso la:

$$[A.4] \quad P = \frac{a \cdot C + b \cdot C^{1/2} + m \cdot C^{1/3} \text{ ecc.}}{n \cdot V + p \cdot V^{1/2} + q \cdot V^{1/3} \text{ ecc.}}$$

o attraverso la:

$$[A.4'] \quad P = \frac{M \cdot C + a \cdot C^{1/2} + b \cdot C^{1/2} + \dots}{M \cdot V + a \cdot V^{1/2} + b \cdot N^{1/2} + \dots}$$

ma poiché «né il numeratore, né il denominatore della frazione può essere composto di quantità semplici e di altre quantità radicali» perché ciò richiederebbe che infiniti ed infinitesimi siano espressi attraverso ordini differenti, si può pertanto ben supporre che «le quantità economiche dei prezzi e dei numeri di compratori e venditori siano esprimibili coi simboli analitici, e si può anche supporre che crescano

e scemino oltre qualunque limite, cioè, per esprimersi colle frasi analitiche, che diventino infinitamente piccole o infinitamente grandi; ma non si possono immaginare in questi soggetti (compratori e venditori) degli ordini differenti di quantità come nelle linee» [*ibidem* 376-377].

L'argomento viene ripreso nell'estratto posto in appendice: «già si è altrove osservato» [*ibidem*, 375], che la [A.1] debba essere risolta nella:

$$[A.1''] \quad P = \frac{C}{V}$$

sotto le due seguenti condizioni, che:

1) «nel numeratore della frazione non può entrare nessuna quantità costante» [*ibidem*, 375], che possiamo denominare condizione di libertà di entrata e di uscita dei compratori; a cui occorre aggiungere la ulteriore condizione di infiniti di ugual ordine, la quale richiede che «l'esponente del numero dei compratori» sia:  $m \cong 1$ ;

2) «nel denominatore della frazione non vi può essere una quantità costante» [*ibidem*, 376], che possiamo denominare condizione di libertà di entrata e di uscita dei venditori; a cui occorre aggiungere la ulteriore condizione che misura la «potenza del numero de' venditori», cioè che la  $n \cong 1$ , cosicché «il prezzo si debba esprimere con una quantità infinitamente piccola dello stesso ordine».

Il Frisi conclude quindi che nell'analisi del prezzo di ogni singola merce «qualsiasi», seguendo il Verri, la [A.1''] varrà se si accoglieranno tutte le ipotesi di *coeteris paribus* già esposte. E perciò in tal caso si «supporrebbero delle altre condizioni, dati o elementi del problema che qui non vogliono considerarsi, supponendosi in queste astratte considerazioni la stessa quantità delle merci, lo stesso bisogno de' compratori, in somma pari tutte le altre circostanze fuorché il numero semplice de' compratori e venditori».

Al par. 5 *Principj generali dell'Economia* [*ibidem*, 43].

Nelle note a questo paragrafo il Frisi riprende l'argomento del paragrafo precedente vedendo le «variazioni successive e simultanee» del prezzo  $P$ , del numero dei compratori  $C$  e del numero dei venditori  $V$ , quantità, va ricordato, che non possono essere costanti. Facendo la derivata prima della [A.1'']:

$$[A.5] \quad \frac{V \cdot dC - C \cdot dV}{V^2} = 0$$

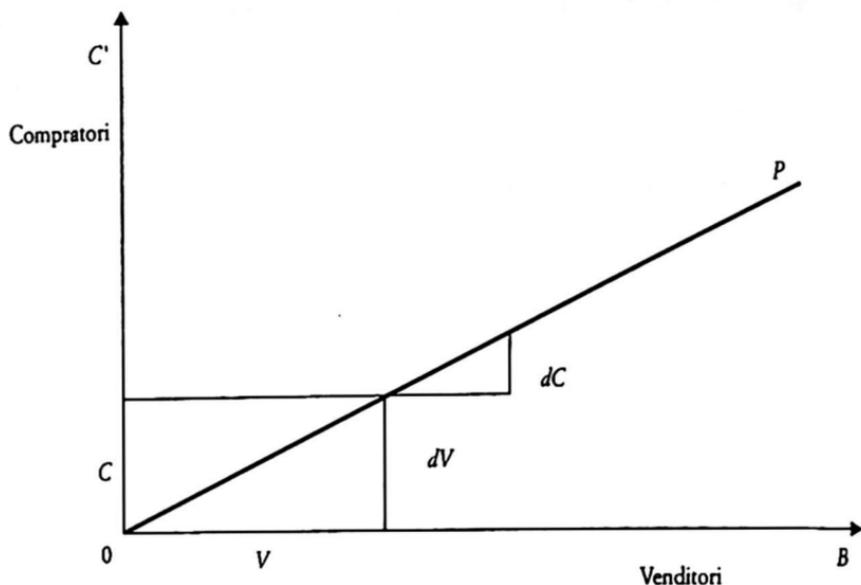


FIG. 1. Variazioni successive e simultanee di  $P$ ,  $C$ ,  $V$ .

si ottiene la condizione o di massimo o di minimo che si avrà per:

$$[A.6] \quad \frac{dC}{dV} = \frac{C}{V}$$

che diviene un massimo per  $C$  infinitamente grande (oppure per  $V$  infinitamente piccolo) o un minimo per  $C$  infinitamente piccolo (oppure per  $V$  infinitamente grande), e quindi «il prezzo sarà massimo o sarà minimo quando le variazioni simultanee saranno proporzionali alle quantità stesse che si variano» [*ibidem*, 43] (secondo Theocharis [1983]), rappresentabile attraverso la figura 1).

Al par. 13 *Del valore del denaro e influenza che ha sull'industria* [*ibidem*, 84]

In questa nota, riproposta la distinzione del Verri tra merce «particolare» fin qui considerata e merce «universale» (o moneta), denominato  $U$  il valore della merce universale in un determinato momento in cui  $P$  rappresenti il prezzo dell'*insieme* delle merci particolari, e denominato  $u$  il valore della merce universale in un altro momento in cui  $p$  rappresenti il prezzo dell'*insieme* delle merci particolari, si otterrà la:

$$[A.7] \quad P:p = u:U$$

e poiché  $P = C/V$ , ricordando che in tal caso  $P, p, C, c, V, v$ , rappresentano l'insieme delle merci particolari e non già una singola merce particolare come nella [A.1"], si avrà che:

$$[A.8] \quad u:U = \frac{C}{V} : \frac{c}{v}$$

e cioè il valore della merce «universale» (o moneta) è inversamente correlato al numero dei compratori (riferiti all'insieme delle merci particolari) e direttamente correlato al numero dei venditori (sempre riferiti all'insieme delle merci particolari).

Al par. 14 *Degl'Interessi del denaro* [*ibidem*, 92, 97-98].

Sia la domanda di moneta rappresentata dalle «ricerche»  $R$  e l'offerta della moneta stessa dalle «offerte»  $O$ , ed il prezzo della moneta scaturente da «ricerche» ed offerte  $I$  (o tasso di interesse) varrà la:

$$[A.9] \quad I = \frac{R}{O}$$

e perciò il prezzo della moneta non sarà più dato dal «numero» dei compratori e dal «numero» dei venditori bensì dalla «domanda» e dall'«offerta». In modo simile al caso della merce particolare la condizione per l'esistenza o di un massimo o di un minimo è data dalla:

$$[A.10] \quad \frac{dR}{dO} = \frac{R}{O}$$

che si realizza allorché la domanda (o l'offerta) cresce infinitamente oppure quando l'offerta (o la domanda) diminuisce a zero. Inoltre, e ciò costituisce un tratto distintivo della merce «universale», quando l'offerta e la domanda sono proporzionali ai loro cambiamenti simultanei» [*ibidem*, 97].

Al par. 17 *Della Circolazione* [*ibidem*, 112].

Nel riprendere l'espressione del Verri: «crescendo la quantità del denaro, quando essa venga in una nazione per l'industria [...] e quanto più s'andrà moltiplicando l'annua riproduzione e la quantità delle merci particolari, quanto maggior moto prenderà la circolazione

della merce universale» [*ibidem*, 112], il Frisi introduce un esplicito parallelo tra fisica ed economia.

Riferendosi alla teoria del Maupertuis che «ha misurato l'azione meccanica col prodotto della massa, della velocità e dello spazio percorso», sostiene che analogamente «l'azione economica e la ricchezza dello stato potrebbe misurarsi dalla popolazione, dalle quantità del metallo circolante e dalla quantità della circolazione». E pertanto «sarà la massima ricchezza in ragione composta della semplice popolazione e della ragion duplicata della massa che è in circolo» [*ibidem*, 112].

Al par. 20 *Del Cambio* [*ibidem*, 130].

«Il guadagno e le perdite che fa uno stato nelle variazioni del cambio è in ragione diretta dei crediti e delle vendite e in ragion inversa de' debiti e delle compre» [*ibidem*, 130].

Al par. 21 *Della Popolazione* [*ibidem*, 134].

«Supposta  $R$  la quantità della riproduzione,  $T$  la quantità del travaglio e prese per quantità costanti  $A$  e  $B$ , nel caso che la prima quantità formi un massimo e un minimo la seconda, sarebbero le equazioni differenziali del problema  $dT = 0$ ,  $dR = 0$ , e l'equazione integrale  $R + AT = B$ ».

Quindi la forma della funzione che esprime le relazioni tra quantità della riproduzione  $R$  e quantità di travaglio-lavoro  $T$  deve essere espressa in uno dei due modi seguenti:

1) dato l'ammontare di produzione annua (cioè per  $R = \bar{R}$ ) determinare la quantità minima di travaglio-lavoro per ottenere  $R = \bar{R}$ ;

2) dato l'ammontare di travaglio-lavoro (cioè per  $T = \bar{T}$ ) determinare la quantità minima di produzione annua per ottenere  $T = \bar{T}$ .

Problema risolvibile attraverso quegli isoperimetrici che soddisfino le due equazioni integrali:

$$[A.11'] \quad R + AT = B$$

$$[A.11''] \quad R = B - AT$$

le quali si risolvono rispettivamente quando:

$$\begin{aligned} dR &= 0 \text{ per } R = \max; \\ dT &= 0 \text{ per } T = \min. \end{aligned}$$

Al par. 26 *Come si animi l'industria avvicinando l'uomo all'uomo* [*ibidem*, 152].

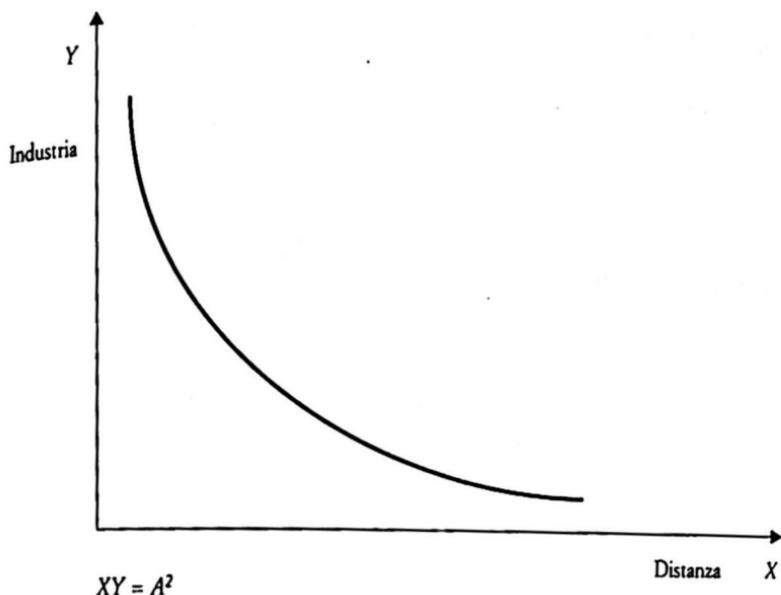


Fig. 2. Rappresentazione dell'economia di agglomerazione.

«L'industria si potrebbe rappresentare colle semiordinate di una iperbole tra gli asintoti, le cui ascissa fossero la distanza degli uomini tra loro e, posta la distanza  $X$ , l'industria  $Y$  e presa  $A$  per quantità costante, sarebbe,  $XY = A^2 \dots$ » [*ibidem*, 152] (vedi fig. 2):

[A.12]  $XY = A^2$

Tale relazione tra industria e distanza si può muovere soltanto entro campi finiti che forniscono da un lato il limite all'espansione dell'industria (attraverso un indicatore che si può chiamare tasso massimo di agglomerazione) e dall'altro il limite alla contrazione dell'industria stessa (attraverso un indicatore che si può chiamare tasso massimo di dispersione della popolazione).

Al par. 27 *Dell'Agricoltura* [*ibidem*, 155-156].

«Supposto che il travaglio ridotto alla maggiore semplicità possibile e chiamato  $N$  il numero delle persone impiegate in un dato genere di cultura e  $R$  la quantità della riproduzione, qui pure si avrà un problema del genere dell'isoperimetrici e saranno le due equazioni differenziali del problema  $dR = 0$  e  $dN = 0$  e l'equazione integrale  $R + AN = B$ ».

Al par. 29 *Origine del Tributo* [*ibidem*, 168-169].

Non soltanto «la sicurezza di uno stato sarà proporzionale alla

quantità del tributo» ma «la stessa forza politica o permanente o temporaria di differenti stati è in ragione composta della popolazione e della quantità del tributo» [*ibidem*, 168].

Al par. 33 *Se convenga addossare tutti i carichi ai Fondi delle terre* [*ibidem*, 198].

«Pare evidente che il possessore mercante debba portare una parte del peso appunto come il possessore terriero» ed in conseguenza di ciò la curva rappresentativa dei tributi da esigere dovrebbe essere costruita in analogia a quella rappresentativa della ricchezza dato che, appunto, il tributo deve essere ad essa proporzionale.

In appendice: *Estratto* [*ibidem*, 237-253].

Riprodotta in: Custodi [1804, Tomo XVII, 369-383].

### Riferimenti bibliografici

- Anonimo (1774), *Osservazioni sopra il libro intitolato L'economia politica stampato per la sesta volta in Livorno l'anno 1772*, Lucca, Giusti.
- Barbarisi, G. (1982), *L'elogio di Maria Teresa di Paolo Frisi*, in Barbarisi et al. [1982, 319-354].
- (1987) (a cura di), *Ideologia e scienza nell'opera di Paolo Frisi: (1728-1784)*, 2 voll., Milano, Angeli.
- Barbarisi, G., De Maddalena, A. e Rotelli, E. (1982), *Economia, istituzioni, cultura in Lombardia nell'età di Maria Teresa*, Bologna, Il Mulino.
- Bianchini, M. (1982), *Felicità pubblica e matematica sociale negli economisti italiani del settecento*, Parma, Studium.
- (1987), *Some Fundamental Aspects of Italian Eighteen-Century Economic Thought*, in D. A. Walker (a cura di), *Perspectives on the History of Economic Thought*, vol. I.
- Bousquet, G. H. (1958), *Histoire de l'économie mathématique jusqu'à Cournot*, «Metroeconomica», vol. X, pp. 121-135.
- Brigaglia, A. (1987), *I fondamenti dell'algebra e della geometria nell'opera di Paolo Frisi*, in Barbarisi [1987, vol. I, 75-98].
- Carli, G. R. (1772), *Meditazioni sull'economia stercoraria*, 16 pp., s.l. né d.
- Casini, P. (1982), *Paolo Frisi, le riforme teresiane e il ruolo dell'intellettuale scientifico*, in Barbarisi et al. [1982, vol. II, 129-142].
- Cova, A. (1987), *Il contributo alla teoria economica di Paolo Frisi*, in Barbarisi [1987, vol. I, 447-473].
- Custodi, P. (1804), *Scrittori Classici Italiani di economia politica*, parte moderna, tomi XV e XVII, Milano, De Stefanis.
- Di Sieno, S. e Galuzzi, M. (1987), *Paolo Frisi e la metafisica del calcolo*, in Barbarisi [1987, vol. I, 35-74].
- Einaudi, L. (1938), *Francesco Fuoco rivendicato*, in «Rivista di storia economi-

- ca», ristampato in *Saggi bibliografici intorno alle dottrine economiche*, Roma, Edizioni di Storia e Letteratura, 1953, pp. 185 ss.
- Fasiani, M. (1937), *Note ai saggi economici di Francesco Fuoco*, in «Annali di statistica e di economia della Facoltà di Economia e Commercio dell'Università di Genova», pp. 259-277.
- Ferroni, P. (1796), *Esame di alcuni passi delle meditazioni sulla economia politica del conte Pietro Verri*, Società dei Georgofili, riprodotto in Custodi [1804, tomo XVII].
- Frisi, P. (1771), *De problemis quibusdam maximorum et minimorum exercitatio geometrica*, in «Atti Accademia Fisiocritici», tomo IV, pp. 15 ss.
- (1772), *Note dell'Editore alla sesta ediz. di P. Verri, Meditazioni sull'economia politica*, Livorno, pp. 37-39, 43, 84, 92, 97-98, 112, 130, 134, 152, 155-156, 168-169, 198, 232, 237 ss.; riprodotte in Fasiani [1937], note ed estratto, Custodi [1804, tomo XVII, estratto, 369-383].
- (1781), *De quantitibus maximis, minimis, isoperimetricis dissertatio*, in «Atti Accademia Fisiocritici», tomo VI, pp. 121 ss.
- (1782), *Operum tomus primus, algebram et geometriam analyticam continens*, Milano.
- Lloyd, H. (1771), *An Essay on the Theory of Money*, London, Alman; ristampa anastatica a cura di O. Nuccio, Roma, Bizzarri, 1968.
- Pillinini, G. (1982), *Aspetti del mito teresiano in Lombardia da Frisi a Cattaneo*, in Barbarisi et al. [1982, vol. I, 221-234].
- Robertson, R. M. (1949), *Mathematical Economics before Cournot*, in «Journal of Political Economy», pp. 523-536.
- Tagliaferri, G. e Tucci, P. (1987), *Paolo Frisi e gli astronomi di Brera*, in Barbarisi [1987, vol. I, 145-160].
- Theocharis, R. D. (1983), *Early Developments in Mathematical Economics*, London, Macmillan, (I ed. 1961).
- Venturi, F. (1958), *La letteratura Italiana. Storia e testi*, vol. 46, tomo III, *Illuministi italiani*, nota introduttiva a Paolo Frisi, Napoli, Ricciardi, pp. 279 ss.
- (1977), *Le vite incrociate di Henry Lloyd e Pietro Verri*, Torino, Tirrenia, cap. XXV, pp. 190-197.
- (1978), *Le «Meditazioni sull'economia politica» di Pietro Verri, Edizioni, echi, discussioni*, in «Rivista storica italiana», a. X, fasc. III, pp. 530-594.
- Venturi, G. B. (1773), *Meditazioni sulla Economia Politica: edizione sesta accresciuta dall'autore*, Livorno, 1772, nella Stamperia dell'Enciclopedia in ottavo, in «Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia», Modena, tomo III, pp. 228-283.
- Verri, P. (1772), *Meditazioni sull'economia politica*, VI edizione, Livorno, Enciclopedia.