

Stati di natura, economie sequenziali e incertezza

di Frank Horace Hahn

1. Nella teoria di Arrow e Debreu (AD) tutta l'incertezza viene generata esogenamente. L'incertezza nasce dall'evoluzione stocastica degli eventi definiti come sottoinsiemi dello spazio degli stati di natura (S). Uno stato di natura (s) è inteso come una descrizione completa dell'intera storia dell'ambiente che è dato indipendentemente dall'azione degli agenti. Nella teoria AD l'insieme S è visto come un «fondamentale», ossia come parte della descrizione di un'economia che non è elemento della teoria stessa. In effetti nella teoria AD l'economia di mercato rappresenta un velo sopra i fondamentali; cioè, non solo non li influenza in alcun modo ma dipende da essi, come nei due teoremi fondamentali dell'economia del benessere. I prezzi, nel modello AD, non sono incerti poiché tutti i beni AD (distinti fisicamente, per locazione, in base alla data ed all'evento che si realizza) possiedono un mercato nel momento in cui le transazioni vengono intraprese.

Ovviamente, la questione relativa al realismo ed alla rilevanza della teoria AD scaturisce in modo naturale. Nel discuterla tuttavia si rimane immediatamente coinvolti in problemi metodologici, concernenti la funzione di modelli che come sappiamo fin dall'inizio non possiedono capacità descrittive pienamente soddisfacenti. In questo lavoro desidero invece esaminare solamente alcune difficoltà teoriche. In particolare mi concentrerò sulla riformulazione della teoria proposta da [Arrow 1952], mediante l'introduzione di titoli (securities) che permettono transazioni in ogni istante. La presenza di transazioni ripetute in istanti successivi è ciò che secondo Radner [1972] caratterizza le economie-sequenziali (Es). Tale riformulazione rappresenta la base di buona parte della ricerca recente [vedi Geanakoplos 1990 per una rassegna], dove in particolare è studiato il caso in cui l'insieme dei titoli di Arrow è incompleto. Questi lavori sono basati principal-

Questo lavoro riassume alcune conclusioni di un articolo più tecnico [Arrow e Hahn 1996]. Intendo ringraziare Kenneth Arrow per le lunghe conversazioni avute sui temi di questo articolo.

mente su economie di puro scambio a due periodi, ed è questo il motivo per cui adatterò anch'io questo schema.

In tale contesto il risultato di [Arrow 1953] è il seguente. Sia $p \in \mathbb{R}^I$ il vettore dei prezzi dei beni Arrow-Debreu. Sia inoltre $x \in \mathbb{R}^I$ il vettore di eccesso di domanda per un agente tipico, ($x =$ domanda-dotazione); allora l'agente è vincolato nelle sue scelte da $p \cdot x \leq 0$.

La funzione di utilità dell'agente è $U(x)$, ossia dipende dagli scambi in tutti i beni AD. Un equilibrio AD è definito come un vettore di prezzi normalizzati p^* ed un'allocazione di vettori scambiati tra gli agenti, ciascuno dei quali massimizza l'utilità di quell'agente in modo tale che sia $p^* \cdot x \leq 0$ e che l'eccesso di domanda totale di ciascun bene risulti nullo. Poiché i beni AD comprendono beni futuri e condizionati al futuro, la teoria AD richiede l'esistenza di un notevole numero di mercati. Arrow ha mostrato come sotto certe condizioni il numero dei mercati necessari possa diminuire. Sia b , un titolo disponibile ad un prezzo q , al tempo $t=0$. Il titolo è definito dal vettore dei suoi rendimenti $r \in \mathbb{R}^S$, dove r è espresso in unità di numerario. Sia T la matrice $S \times B$ di tali rendimenti, dove S è la cardinalità di S e B il numero dei titoli. Inoltre sia $a \in \mathbb{R}^B$ il portafoglio in possesso di un agente al tempo $t=0$ e supponiamo non vi siano restrizioni alla possibilità di vendite allo scoperto. Infine, sia $p(0) \in \mathbb{R}^I$ il vettore dei prezzi dei beni disponibili a $t=0$ e $p(s)$ quello dei beni disponibili a $t=1$ nello stato s . Quindi, non vi sono mercati futuri contingenti. L'agente ora massimizza $U(x)$ sotto i vincoli

$$(1) \quad p(0) \cdot x(0) \leq 0; [p(s) \cdot x(s)] \leq Ta$$

dove $x(0)$ e $x(s)$ sono i vettori di eccesso di domanda e [...] è un vettore con elementi $p(s) \cdot x(s)$.

Un equilibrio di questa economia sequenziale (nel senso che vi sono scambi a $t=0$ ed a ciascun $(t=1, s)$) è una sequenza di prezzi (espressi in numerario) $[p^*(s)]_s$, tale che la scelta di ciascun agente risulta ottimale dato (1) a questi prezzi, gli eccessi di domanda per tutti beni in ciascun istante sono nulli ed i mercati dei titoli sono sgombri a $t=0$.

Il risultato di Arrow [1953] è il seguente. Se T genera S (ossia per ogni $[p(s) \cdot x(s)]$ esiste un vettore a tale che $[p(s) \cdot x(s)] = Ta$), allora l'insieme degli equilibri dell'economia AD coincide con l'insieme degli equilibri dell'Economia Sequenziale. Hahn [1973] esprime questo risultato asserendo che la struttura sequenziale è *inessenziale*. Se l'insieme degli equilibri differisce (cioè se T non genera S), allora la sequenza è *essenziale*. È importante notare che in equilibrio vi è un

vettore di prezzi $p(s)$ per ogni s . Poiché gli agenti massimizzano sotto il vincolo (1), è necessario assumere che tutti gli agenti in $t=0$ conoscano $p(s)$. In altri termini, è necessario ipotizzare previsione perfetta per ogni stato. Ciò equivale in letteratura ad ipotizzare che le aspettative siano razionali. È chiaro come sia possibile che in una certa economia la condizione di copertura (ossia che T generi S) possa non valere quando vi sia un numero troppo limitato di titoli con rendimenti linearmente indipendenti. Questo è il caso dei mercati incompleti che ha dato origine ad una notevole quantità di contributi [per un'introduzione vedi Geanakoplos 1990]. L'incompletezza certamente implica economie sequenziali essenziali. Nel prossimo paragrafo discuterò come anche la completezza possa essere compatibile con l'essenzialità in presenza di costi di transazione. Successivamente argomenterò che la condizione di copertura non è necessaria per l'inessenzialità, poiché sono solamente gli stati rilevanti per i rendimenti che devono essere generati. Questo punto suggerisce la conclusione che S non sia un «fondamentale» poiché gli stati rilevanti per i rendimenti dipendono dai mercati. Tutto ciò induce ad osservare che oltre all'incertezza generata dall'evoluzione di S vi sia incertezza endogena – incertezza cioè generata dalle azioni degli agenti (Kurz [1974] è stato il primo ad usare questa terminologia). Susseguentemente, tornerò alle spiegazioni dell'incompletezza e mostrerò che quella fornita da Radner [1972] non è decisiva e che può essere superata introducendo titoli condizionati ai prezzi. Rammento ancora una volta al lettore che una trattazione completa con dimostrazioni si trova in Arrow e Hahn [1996].

2. L'economia sequenziale di Arrow viene detta Pareto-efficiente vincolata (*constrained Pareto-efficient*) se è impossibile indurre un miglioramento Paretiano in modo tale che tutte le riallocazioni tra gli stati di natura abbiano luogo attraverso una riallocazione dei titoli esistenti. Supponendo che tutti gli s in S siano rilevanti per i rendimenti è chiaro che quando $B < S$ l'equilibrio sequenziale sarà Pareto-inefficiente, ma non è chiaro se sarà Pareto-inefficiente vincolato. Tuttavia Geanakoplos e Polemarchakis (GP) [1986] hanno dimostrato che $B < S$ implica una Pareto-inefficienza vincolata generica dell'equilibrio sequenziale.

Il risultato di GP può essere intuitivamente compreso nel modo seguente. Quando i titoli sono incompleti alcuni scambi tra stati di natura risulteranno impossibili. Genericamente ciò significa che l'economia raggiunge l'equilibrio con guadagni potenziali derivanti dallo scambio non completamente sfruttati. Un altro modo di formulare quanto sopra è dire che, genericamente, i saggi marginali di sostitu-

zione relativi alla ricchezza, nei diversi stati di natura, non saranno uguali. È importante ora ricordare che se tutti i saggi marginali di sostituzione sono uguali, una piccola riallocazione tra gli agenti lascerà invariati (fino al primo ordine) i prezzi relativi di equilibrio. Questo non accade quando i saggi marginali non sono uguali [Arrow e Hahn 1996]. Sarà quindi vero, nel caso $B < S$, che una piccola riallocazione dei titoli farà variare i prezzi relativi di equilibrio. Un pianificatore benevolente, con funzione di benessere utilitarista nella quale le utilità individuali sono pesate appropriatamente in modo che quando $B = S$ il valore massimo della funzione di benessere genera l'equilibrio competitivo [Negishi 1960], mentre nel caso in cui $B < S$ il pianificatore allocherà i titoli tenendo conto dell'effetto sui prezzi relativi di equilibrio. All'interno di questo scenario il pianificatore non può controllare i prezzi. La variazione dei prezzi conseguente ad una riallocazione della ricchezza ha natura di esternalità; nello scegliere il vettore a un agente non considera gli effetti sui prezzi.

Supponiamo ora che i titoli generino lo spazio degli stati, ma che vi siano costi di transazione nell'acquisto e nella vendita di titoli. Ciò significa che i loro prezzi di acquisto e di vendita differiranno. In assenza di costi di transazione vale la condizione del primo ordine:

$$q_j = \sum \mu(s) r_j(s), \text{ per ogni } j$$

dove $\mu(s)$ rappresenta il saggio marginale di sostituzione tra la ricchezza al tempo $t=1$ (nello stato s) e la ricchezza al tempo $t=0$. Ora se q_j^+ e q_j^- sono rispettivamente i prezzi di acquisto e vendita del titolo j si ottiene:

$$q_j^+ \geq \sum \mu(s) r_j(s) \geq q_j^-, \text{ per ogni } j$$

così che l'agente può non scambiare affatto il titolo j . Ma ancora più importante è che se anche tutti i titoli sono scambiati da ciascun agente si ha, per alcuni schemi di acquisto e vendita, che

$$(2) \quad (q_1^+ \ q_2^+ \ \dots \ q_5^- \ \dots \ q_{10}^-)' = \mu' T$$

dove μ è il vettore riga i cui elementi rappresentano i saggi marginali di sostituzione relativi alla ricchezza. Per ottenere l'equilibrio gli schemi di vendita e di acquisto di alcuni agenti devono differire e da questo segue che i loro μ saranno sempre diversi.

Consideriamo ad esempio il caso più semplice in cui

$$q_j^+ = q_j^+ t_j(p(0)) \text{ e } q_j^- = q_j^- t_j(p(0))$$

dove $t_i(p(0))$ è la funzione di costo unitario di una transazione. Supponiamo che questi costi siano sostenuti da mediatori che operano in condizioni di concorrenza perfetta, così che in equilibrio i loro profitti sono nulli. Se consideriamo ora una riallocazione dei titoli nell'equilibrio sequenziale, questa dovrà ovviamente essere resa operativa dal mediatore. Tuttavia, esprimendo la funzione di benessere sociale in termini delle utilità indirette, e facendo uso del noto Teorema dell'Inviluppo, poiché i μ non sono uguali tra gli agenti, l'ottimo non viene raggiunto grazie alla (2) ma solo quando alcuni termini concernenti la variazione dei prezzi relativi vengono aggiunti sul lato destro. Ciò è sufficiente per enunciare la seguente proposizione.

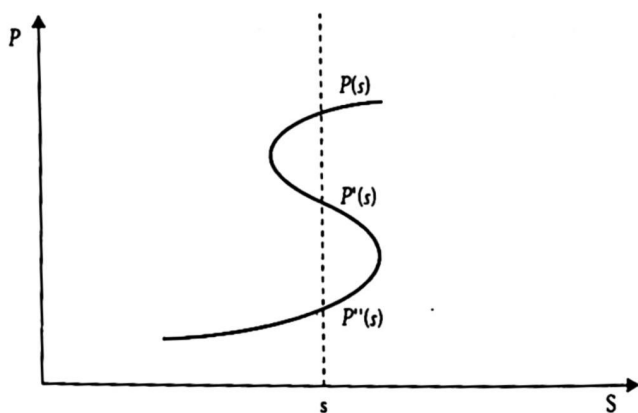
Proposizione 1: Se i costi di transazione sono lineari, tutti gli agenti scambiano ogni titolo e $B=S$, allora l'equilibrio dell'economia sequenziale è Pareto-efficiente vincolato, ossia la sequenza è essenziale.

3. Perché i mercati dei titoli dovrebbero essere incompleti? Certamente i costi di transazione, specialmente se contengono un elemento fisso, possono essere sufficienti a spiegare la presenza di mercati inattivi [vedi anche Bisin 1995]. Ma una spiegazione influente fa riferimento ad asimmetrie informative. Gli agenti possono avere differenti partizioni (sigma algebre), di S e quindi contratti condizionati ad s implicano azzardo morale [vedi Radner 1972]. Si potrebbe tentare di formulare contratti con incentivi compatibili (*incentive compatible contracts*), ma in questo caso abbandoneremmo uno schema walrasiano (anonimo). Tuttavia Radner [1979], in un lavoro successivo non specificamente collegato a questo problema, fornisce un indizio sul perché le asimmetrie informative non siano la spiegazione dei titoli mancanti.

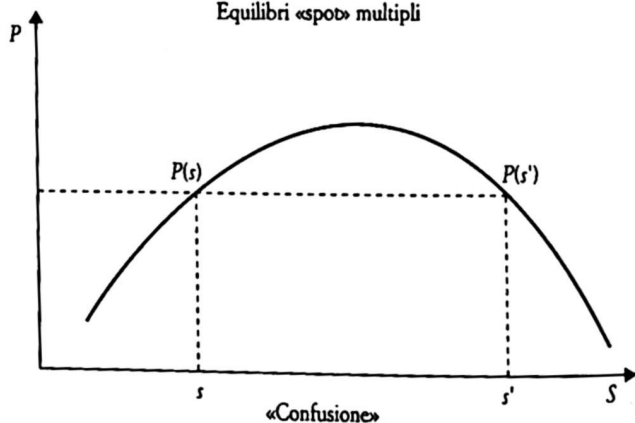
Sia $p(s)$ il vettore dei prezzi di equilibrio, nello stato s , a $t=1$. Supponiamo quindi che non esista un $s' \in S$ tale che $p(s) = p(s')$. Questa ipotesi, detta da Radner di «non-confusione», risulterà genericamente soddisfatta. Infine supponiamo che $p(s)$ sia noto a tutti gli agenti. Ne segue che se invece di condizionare i rendimenti ad s (il quale potrebbe appartenere a partizioni diverse di S per agenti diversi) questi fossero condizionati a $p(s)$ si otterrebbero le medesime opportunità di assicurazione. Infatti, quando i titoli hanno rendimenti condizionati ai prezzi (pubblici) di equilibrio del secondo periodo, l'ostacolo costituito dalle asimmetrie informative può essere superato e quindi non può servire come spiegazione dell'incompletezza. Naturalmente tutto ciò è vero sotto l'ipotesi già discussa di previsione perfetta.

Vi è tuttavia una difficoltà. Supponiamo che $p(s)$ differisca da $p'(s)$, ma che entrambi siano prezzi di equilibrio nello stato s , a $t=1$. La

soluzione del problema, ottenuta facendo riferimento a Savage, è stata quella di fare ricorso alle macchie solari (*sunspots*) – cioè ad un allargamento dello spazio degli stati così che p e p' siano osservati in stati che differiscono in base alle variabili *sunspots*. Nell'utilizzare questa procedura nascono delle questioni piuttosto interessanti su cui mi soffermerò in maggior dettaglio più avanti. Tuttavia, per quanto concerne l'argomentazione precedente, le conclusioni restano sostanzialmente invariate. Quando vale la condizione di «non confusione», un titolo che abbia rendimenti per $p(s)$ diversi da $p'(s)$ rende gli agenti capaci di dedurre s . Ossia, la molteplicità non impedisce la «rivelazione» dello stato del mondo. Il diagramma che segue non necessita commenti.



Equilibri «spot» multipli



«Confusione»

Naturalmente esistono casi in cui l'informazione asimmetrica spiega la mancanza di possibilità assicurative. Questi sono casi di stati idiosincratici come la salute. In economie grandi i prezzi sono indipendenti da questa sorta di stati e quindi non possono essere rivelatori. Invece, per stati noti pubblicamente sembra che i costi di transazione e/o l'assenza di previsione perfetta dei prezzi siano le spiegazioni più accettabili dell'incompletezza.

Tuttavia si può mostrare che se esiste la possibilità di assicurarsi contro gli equilibri multipli, i rendimenti dei titoli sono condizionati anche ai *sunspots* ed i titoli sono completi nello spazio degli stati allargato, allora non vi saranno equilibri multipli ed alcuni titoli risulteranno ridondanti. Questo è un punto interessante che però non intendo perseguire in questa sede.

4. L'introduzione dei *sunspots* ci ricorda che gli stati di natura non sono dati come fondamentali. Non possiamo, prima di aver esaminato meglio l'economia di mercato, includere stati con macchie solari in S ed argomentare che i titoli devono generare tutto S affinché l'economia sequenziale risulti inessenziale. Ma questo è solo un caso estremo.

Supponiamo che la funzione di produzione per il bene x sia indipendente da quale stato (tra due possibili) si realizzi, mentre quella per il bene y dipenda dallo stato. Consideriamo la funzione di utilità

$$\alpha_1 \log(x+1) + \alpha_2 \log(y(s_1)+1) + \alpha_3 \log(y(s_2)+1)$$

In questo caso è possibile scegliere i parametri in modo tale che in equilibrio solamente x venga domandato, a prezzi che garantiscano la copertura dei costi di produzione. Ma ciò implica che agenti con previsione perfetta non siano interessati alla realizzazione dello stato e che non necessariamente lo spazio degli stati debba essere generato per ottenere l'inessenzialità. Tuttavia, tutto ciò non è noto fino a che l'equilibrio non sia identificato.

Concludo osservando che la condizione di copertura, ignorando la rilevanza degli stati per i rendimenti, non è condizione necessaria per la sequenza inessenziale. In effetti ritengo che S non dovrebbe, in questo caso, essere incluso nei «fondamentali».

Ma ciò può essere sostenuto in modo ancora più deciso. Definiamo l'incertezza come endogena quando il benessere di almeno un agente dipende dalle conseguenze delle azioni degli altri agenti, e quelle conseguenze (così come le azioni) sono incerte. Allora, come Kurz ha argomentato fin dal 1974, vi sono solidi motivi per affermare

che la maggior parte dell'incertezza in un'economia sia endogena. Terremoti e condizioni meteorologiche sono indubbiamente rilevanti per i rendimenti, ma sembrano costituire solamente una piccola parte dell'incertezza presente in un'economia decentralizzata.

Questo punto di vista va alla radice di buona parte della teoria corrente, particolarmente quella macro-economica. Tipicamente si suppone che gli agenti conoscano la «struttura» dell'economia. Quando esistono equilibri multipli tuttavia perfino tale conoscenza non può eliminare l'incertezza, a meno che non sia noto con certezza quale equilibrio prevarrà o quale legge probabilistica governi la scelta tra di essi. Anche seguendo i nuovi macro-economisti nell'assumere che tutte le determinanti dei prezzi siano note, agenti avversi al rischio prenderanno in considerazione «l'errore» anche se questo ha media nulla. È accettabile ipotizzare che gli agenti usino tutta l'informazione a loro disposizione e che non mantengano credenze che risultino sistematicamente falsificate. Ciò tuttavia non implica che le loro credenze finiscano con l'essere condizionate dalle credenze di altri agenti e dagli stati del mondo.

La nostra indagine ci ha condotto ad un punto in cui la nozione di equilibrio con aspettative razionali deve essere ulteriormente esaminata. (Non è possibile sperare nell'aiuto dei macro-economisti). Non sono in grado di farlo in questa sede ma spero di aver detto a sufficienza per suggerire che S , se deve servire come generatore dell'incertezza, dovrà andare oltre Savage per includere azioni e credenze, mentre in alcune circostanze dovrà essere ristretto per questioni di rilevanza dei rendimenti.

Vi sono altre due questioni che è necessario trattare.

a) Un tipo di incertezza che gli agenti affrontano è che le promesse possono non essere mantenute. Questo naturalmente spiega perché vendite allo scoperto illimitate non siano un'ipotesi davvero invitante. Possiamo ora appellarci ad uno stato idiosincratico – dotazioni ed onestà di un agente – per formulare quell'incertezza e susseguentemente alle asimmetrie informative per spiegare perché l'incertezza possa non essere assicurabile. Ma non vi è veramente speranza di generare S in modo tale che includa stati con bancarotta. Una promessa di pagare x da parte di A se B è in bancarotta è esposta essa stessa al rischio che A dichiari bancarotta. Inoltre, la dotazione e l'onestà di A non costituiscono informazione sufficiente. Ciò perché la capacità che A possiede di far fronte alla sua promessa, può dipendere dalla capacità che altri agenti hanno di mantenere promesse fatte ad A . Tutto ciò suggerisce che i nostri vincoli di bilancio usuali, almeno in un contesto sequenziale, possono non essere sufficienti per

un'analisi dell'incertezza a meno che non si aggiungano vincoli di compatibilità degli incentivi (*incentive compatible constraints*). Non esistono effettivamente validi motivi per ritenere che altrimenti gli agenti rispettino sempre i loro vincoli di bilancio [Hammond 1992].

b) A prescindere da tutto ciò, vi sono serie difficoltà concettuali con la teoria di Savage relativa alla formulazione degli stati del mondo una volta che si faccia a meno dei «mondi piccoli». È chiaro che vi sono stati – descrizioni del nostro ambiente – di cui ad ogni istante siamo «inconsapevoli» [Modica e Rustichini 1994]. Se ciò non fosse la ricerca scientifica terminerebbe. Per esempio, eravamo inconsapevoli dell'esistenza del virus dell'AIDS fino a quando non è comparso (e quindi non faceva parte di alcuna descrizione). Abbiamo inoltre avuto la necessità di scoprire il suo modo di funzionare. Tutto questo a me pare indiscutibile. Ciò che a noi interessa in questa sede è che risulta ragionevole supporre che gli agenti sappiano di essere inconsapevoli di un gran numero di stati e che questa conoscenza è essa stessa fonte di incertezza. Ciò può essere formalizzato in qualche misura, ma problemi tecnici notevoli continuano a rimanere irrisolti. (Nuove teorie come le probabilità non-additive [Schmeidler 1989] sono collegate a queste difficoltà.)

5. Nel concludere desidero chiarire un punto. Ho argomentato che il formalismo attuale per trattare l'incertezza nei modelli di Equilibrio Generale è insoddisfacente, ma questo non deve indurre a pensare che io lo ritenga inutile. In effetti è proprio quella formulazione che ci permette di evidenziare le lacune importanti nella nostra conoscenza. La teoria walrasiana è una sorta di laboratorio. Molte sono le questioni di rilievo, alcune delle quali sono state da me discusse, altre neppure menzionate (per esempio, l'incertezza intrinseca ai modelli di ricerca, o i postulati della concorrenza perfetta che rimuovono altri tipi di incertezza). Tuttavia ritengo che ciò non vizi l'utilità della teoria nei nostri tentativi di comprendere il mondo. Ciò che non dobbiamo fare è agire come se l'avessimo già compreso e che il laboratorio sia il mondo.

Riferimenti bibliografici

- Arrow, K.J. (1953), *Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques*, in «Econometrie», Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique 11, pp. 41-47, traduzione inglese nella «Review of Economic Studies», 31, 1964, pp. 91-96.
- Arrow, K.J. e Hahn, F.H. (1996), *Notes on Sequence Economies*, Transaction

- Costs and Uncertainty*, in «Quaderni del Dipartimento di Economia Politica», n. 204, Università di Siena.
- Bisin, A. (1995), *General Equilibrium and Endogenously Incomplete Financial Markets*, Cambridge (Mass.), The MIT Press, mimeo.
- Geanakoplos, J. (1990), *An Introduction to General Equilibrium with Incomplete Markets*, in «Journal of Mathematical Economics».
- Geanakoplos, J. e Polemarchakis, H. (1986), *Existence, Regularity and Constrained Suboptimality of Competitive Allocations when Markets are Incomplete*, in W.P. Heller, D. Starr e D.A. Starrett (a cura di), *Essays in Honor of Kenneth Arrow*, Cambridge, Cambridge University Press, vol. 3.
- Hahn, F.H. (1973), *On Transaction Costs, Inessential Sequence Economies and Money*, in «Review of Economic Studies», XL (4), pp. 124, 449-462.
- Hammond, P.J. (1992), *On the Impossibility of Perfect Capital Markets*, in *Economic Analysis of Markets and Games, Essays in Honor of Frank Hahn*, Cambridge (Mass.), The MIT Press.
- Kurz, M. (1974), *The Kesten-Stigum Model of the Treatment of Uncertainty in Equilibrium Theory*, in M.S. Balch, P.L. McFadden e S.Y. Wu (a cura di), *Essays in Economic Behavior under Uncertainty*, Amsterdam, North Holland, pp. 389-399.
- Modica, S. e Rustichini, A. (1994), *Awareness and Partitional Information Structures*, in «Theory and Decision», 37, pp. 107-124.
- Negishi, T. (1960), *Welfare Economics and the Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*, in «Metroeconomica», 5, pp. 92-97.
- Radner, R. (1972), *Existence of Equilibrium of Plan, Prices and Price Expectations*, in «Econometrica», 40(2), pp. 289-303.
- (1979), *Rational Expectations Equilibrium Generic Existence and the Information Revealed by Prices*, in «Econometrica», 47, pp. 655-678.
- Schmeidler, D. (1989), *Subjective Probability and Expected Utility without Additivity*, in «Econometrica», 57, pp. 571-587.