

7. Il massimo di ofelimità per la collettività: definizioni, analisi, interpretazioni di Pareto e loro generalizzazione

di Aldo Montesano

1. Introduzione

Pareto introduce nel 1894 la nozione poi indicata come «massimo di ofelimità per la collettività» in riferimento alla scelta dei coefficienti di produzione. Questo problema viene discusso anche in un successivo articolo del 1895, nel *Cours* [Pareto 1986 e 1987] e nel *Manuale* [Pareto 1906]. Pur con simbologia in parte diversa l'analisi è sostanzialmente la stessa e verrà presentata in seguito, nel par. 2, in modo unitario. Nel *Cours* viene considerato anche il problema del massimo di ofelimità collettiva in relazione al regime degli scambi: questa analisi e quella inclusa in un articolo del 1902 in polemica con Scorza sono discusse nel par. 3. La teoria matura di Pareto sul tema si trova nel *Manuale* [Pareto 1906, in particolare nell'appendice dell'edizione francese del 1909] ed è riassunta nella voce *Economie mathématique* [Pareto 1911] e nel *Trattato di sociologia* [Pareto 1916]: essa viene presentata nel par. 4. Queste tre fasi differiscono non perché vi siano contraddizioni o mutamenti significativi di opinione, ma perché ciascuna di esse introduce nuovi elementi di analisi e spunti, peraltro non sempre sviluppati completamente e ben chiari. Tuttavia la loro importanza è tale e il contributo analitico di Pareto così innovativo da far ritenere l'introduzione del «massimo di ofelimità per la collettività» il contributo più importante fra gli apporti di Pareto alla scienza economica. Peraltro questo contributo è poco noto e trattato superficialmente, forse con l'unica rilevante eccezione di Allais¹, nella letteratura economica, che spesso si limita a ricordare la cruda definizione di massimalità paretiana. La definizione dell'insieme delle allocazioni Pareto-massimali è discussa nel par. 5 seguendo quattro modi diversi, di cui viene dimostrata la perfetta equivalenza.

¹ La riflessione di Allais sul problema è oggetto di numerose sue pubblicazioni, dal 1943 in poi. La loro sintesi si trova in Allais [1981, 2° ed. 1989]. Sul tema, successivamente a questo volume, anche Allais [1985] e Allais [1987].

2. Il massimo di utilità dato dalla libera concorrenza

Nell'articolo del 1894, il cui titolo denomina questo par., Pareto è interessato unicamente alla determinazione dei coefficienti di produzione². L'allocazione dei beni fra gli individui non è oggetto di analisi. Perciò per l'allocazione in esame, di cui si deve accertare la massimalità, Pareto suppone che essa rappresenti già una situazione massimale per quanto riguarda l'allocazione dei beni fra gli individui, mentre così non è necessariamente in relazione alle combinazioni produttive. L'obiettivo della ricerca è la determinazione della condizione richiesta perché la produzione sia massimale, non esista cioè alcuna riallocazione possibile dei beni nella produzione che faccia aumentare l'utilità di tutti gli individui. L'ipotesi che l'allocazione iniziale dei beni fra gli individui sia già massimale non è introdotta da Pareto per mezzo di una esplicita condizione di efficienza paretiana (ad esempio, l'uguaglianza fra gli individui dei saggi marginali di sostituzione) che non era ancora nota e che Pareto avrebbe definito più tardi, ma accogliendo la tesi walrasiana³ che la concorrenza produca un massimo di utilità (nell'economia di scambio e in quella di produzione con coefficienti fissi). Quindi, Pareto ipotizza che l'allocazione iniziale, sicuramente massimale per quanto riguarda la distribuzione dei beni fra gli individui, definisca un sistema di prezzi e che le quantità dei beni presso ciascun individuo siano tali da uguagliare i rapporti fra le utilità marginali ai rapporti fra i corrispondenti prezzi.

Pareto dimostra come i coefficienti di produzione determinati dalla libera concorrenza coincidano con quelli che verrebbero scelti in modo da massimizzare, nel senso che verrà ora precisato, le utilità degli individui.

Si parta dalla allocazione in esame e si consideri una variazione infinitesima dei coefficienti di produzione compatibile con le possibilità tecniche di produzione rappresentate da equazioni, cioè da fun-

² Nell'articolo del 1894, come in quello del 1895, Pareto usa il termine «utilità» invece che «ofelimità», termine questo introdotto nel *Cours* per evitare equivoci sulla sua natura soggettiva e sul suo riferimento alle scelte individuali. Si tenga presente inoltre che l'utilità, come anche l'ofelimità nel *Cours*, è una grandezza cardinale (diverrà ordinale nel *Manuale*), sebbene venga esclusa la possibilità di confronti interpersonali. Comunque, al riguardo, si vedano nel *Cours* i §§ 4-21 e 643-653.

³ Nell'articolo del 1894 Pareto sembra mostrare di ritenere che Walras abbia dimostrato che la libera concorrenza produce un massimo di utilità. Nella successiva polemica con Scorza [1902] prende le distanze scrivendo che avrebbe discorso delle cose sue «e non di quelle del Walras». Nel *Trattato di sociologia* (§ 2129, nota 1) scrive esplicitamente che Walras non ha mai discusso del massimo di ofelimità per la collettività ma solo del massimo di ofelimità per ciascun individuo e cita estesamente Boven, che dimostra il circolo vizioso del ragionamento di Walras sul «teorema dell'utilità massima delle merci».

zioni di produzione. Questa variazione dei coefficienti determina una variazione delle quantità prodotte e impiegate dei beni e perciò, considerando le loro possibili distribuzioni fra gli individui, una variazione delle quantità dei beni presso gli individui, la cui utilità risulta così modificata. Si consideri per ogni individuo la variazione della quantità di numerario che apporterebbe, ferme restando le quantità degli altri beni, la medesima variazione di utilità e si sommino queste variazioni equivalenti individuali di numerario. Se esistono variazioni dei coefficienti di produzione che rendono positiva questa somma, allora esiste una distribuzione fra gli individui delle variazioni delle quantità dei beni ottenuti e impiegati dalla produzione che rende positive tutte le variazioni individuali di utilità, per cui quelle variazioni dei coefficienti di produzione risultano vantaggiose per la collettività e la allocazione iniziale in esame non determina un massimo di utilità per la collettività. Se quella somma è negativa, allora una variazione opposta dei coefficienti di produzione (possibile per ipotesi, se le funzioni di produzione hanno derivate continue rispetto ai coefficienti variabili di produzione e questi non sono, nella situazione iniziale, in un punto di frontiera che ne consenta la variazione in un senso ma non in quello opposto) ne determina una variazione positiva, perciò con conclusione analoga alla precedente. Ne consegue che il massimo di utilità per la collettività richiede che non sia possibile alterare, a partire dalla allocazione iniziale, variando i coefficienti di produzione, la somma delle variazioni delle quantità di numerario equivalenti, in utilità, alle variazioni dei beni ottenuti e impiegati dalla produzione. Questa somma risulta proporzionale alla variazione (a prezzi dati) del profitto complessivo della produzione. Poiché l'uguaglianza a zero di questo differenziale è una condizione richiesta dalla libera concorrenza delle imprese, questa implica il raggiungimento di un massimo di utilità.

Formalmente il problema viene così presentato da Pareto. Siano

$$F_a(a_t, a_s, a_v, \dots) = 0, \quad F_b(b_t, b_s, b_v, \dots) = 0, \quad \dots$$

le funzioni di produzione dei beni $A, B, \dots$, ove a_t è il coefficiente di produzione del bene T nella produzione di A , ecc. (Si noti come questa scrittura implichi rendimenti di scala costanti, ipotesi che viene abbandonata nell'articolo del 1895)⁴. La libera concorrenza determina i coefficienti di produzione in base al principio del minimo costo, richiede cioè⁵

⁴ In questo articolo le funzioni di produzione sono del tipo $\chi_a(a_t, a_s, \dots, R_a) = 0$, ove R_a è la quantità prodotta del bene A . Si veda anche il § 719 del *Cours*.

⁵ Il costo di produzione del bene A è $p_t a_t + p_s a_s + p_v a_v \dots$. Le equazioni nel testo sono le condizioni del primo ordine del suo problema di minimo subordinatamente alla funzione di produzione $F_a(a_t, a_s, a_v, \dots) = 0$, che viene esplicitata rispetto a a_t , ossia $a_t = a_t(a_s, a_v, \dots)$.

$$p_t \frac{\partial a_t}{\partial a_s} + p_s = 0, \quad p_t \frac{\partial a_t}{\partial a_v} + p_v = 0, \quad \dots$$

Si mettano ora da parte le relazioni della libera concorrenza e si consideri il massimo di utilità per la collettività⁶.

La variazione di utilità dell'individuo i -esimo conseguente alla variazione del coefficiente a_s è

$$dU_i = \left(\varphi_{ia} \frac{\partial r_{ia}}{\partial a_s} + \varphi_{ib} \frac{\partial r_{ib}}{\partial a_s} + \dots - \varphi_{it} \frac{\partial r_{it}}{\partial a_s} - \varphi_{is} \frac{\partial r_{is}}{\partial a_s} - \dots \right) da_s,$$

ove $\varphi_{ia}, \dots$ sono le utilità marginali, $r_{ia}, \dots$ le quantità dei beni ottenuti e $r_{is}, \dots$ le quantità dei beni ceduti dall'individuo alla produzione. (Relazioni analoghe valgono per ogni altro coefficiente variabile di produzione, tranne $a_t, b_t, \dots$ che sono considerate grandezze dipendenti, determinate dalle funzioni di produzione $a_t = a_t(a_s, a_v, \dots)$). Le derivate $\frac{\partial r_{ia}}{\partial a_s}, \dots$ indicano come vengono modificate (secondo un

qualche criterio di allocazione) le quantità $r_{ia}, \dots$ al variare dei coefficienti di produzione. Sia A il numerario (cioè $p_a = 1$) e siano $p_b, \dots, p_t, p_s, \dots$ i prezzi dei beni nella allocazione iniziale: perciò

$$\varphi_{ib} = p_b \varphi_{ia}, \dots \varphi_{it} = p_t \varphi_{ia}, \dots$$

e quindi

$$dU_i = \varphi_{ia} \left(\frac{\partial r_{ia}}{\partial a_s} + p_b \frac{\partial r_{ib}}{\partial a_s} + \dots - p_t \frac{\partial r_{it}}{\partial a_s} - p_s \frac{\partial r_{is}}{\partial a_s} + \dots \right) da_s.$$

Si consideri ora una variazione di r_{ia} che determina la stessa variazione di utilità: poiché

$$dU_i = \varphi_{ia} dr_{ia}$$

si trova

$$dr_{ia} = \frac{1}{\varphi_{ia}} dU_i = \left(\frac{\partial r_{ia}}{\partial a_s} + p_b \frac{\partial r_{ib}}{\partial a_s} + \dots - p_t \frac{\partial r_{it}}{\partial a_s} - p_s \frac{\partial r_{is}}{\partial a_s} - \dots \right) da_s,$$

⁶ I simboli usati nel seguito non corrispondono del tutto a quelli di Pareto, allo scopo di rendere più chiaro il suo ragionamento. È inutile ricordare come la trattazione di Pareto non sia sempre chiara e esplicita. Inoltre, l'ultima parte dell'articolo, ove si considerano i nuovi capitali, ripresa solo parzialmente nel *Cours* (§§ 724-725 e 744 in nota), mi risulta oscura, forse è sbagliata.

la cui somma è

$$dR_a^e = \sum_i \frac{1}{\varphi_{ia}} dU_i = \left(\frac{\partial R_a}{\partial a_s} + p_b \frac{\partial R_b}{\partial a_s} + \dots - p_t \frac{\partial R_t}{\partial a_s} - p_s \frac{\partial R_s}{\partial a_s} - \dots \right) da_s.$$

La condizione, scritta da Pareto, per il massimo di utilità per la collettività è

$$dR_a^e = \sum_i \frac{1}{\varphi_{ia}} dU_i = 0$$

e viene spiegata nel modo seguente. Se fosse $\sum_i \frac{1}{\varphi_{ia}} dU_i > 0$, si potrebbe considerare una distribuzione dei beni, a partire dalla situazione iniziale, tale che $dU_i > 0$ per ogni i : basterebbe scegliere un criterio di allocazione per cui

$$\frac{\partial r_{ia}}{\partial a_s} + p_b \frac{\partial r_{ib}}{\partial a_s} + \dots - p_t \frac{\partial r_{it}}{\partial a_s} - p_s \frac{\partial r_{is}}{\partial a_s} - \dots > 0$$

per ogni i . In altri termini, se fosse $dR_a^e > 0$ si potrebbe suddividere dR_a^e fra gli individui in modo da avere $dr_{ia}^e > 0$ per ogni i , cioè considerare allocazioni che determinano variazioni di utilità, rispetto a quelle iniziali, pari a quelle che sarebbero determinate dall'accrescimento dr_{ia}^e , ferme restando le quantità degli altri beni, del numerario. Se a seguito della variazione da_s fosse $dR_a^e < 0$, allora una variazione opposta di a_s (cioè $-da_s$) renderebbe $dR_a^e > 0$ e si applica il ragionamento di prima. Non è allora possibile accrescere l'utilità di tutti gli individui solo se, a partire dalla allocazione iniziale, si ha

$$dR_a^e = \sum_i \frac{1}{\varphi_{ia}} dU_i = 0$$

per ogni variazione possibile dei coefficienti di produzione. Ne consegue che l'allocazione iniziale determina un massimo di utilità per la collettività solo se sono soddisfatte le condizioni del primo ordine, a prezzi dati, di massimo profitto totale

$$\frac{\partial R_a}{\partial a_s} + p_b \frac{\partial R_b}{\partial a_s} + \dots - p_t \frac{\partial R_t}{\partial a_s} - p_s \frac{\partial R_s}{\partial a_s} - \dots = 0,$$

ove $R_a, R_b, \dots$ sono le quantità ottenute e $R_t, R_s, \dots$ quelle impiegate.

te dalla produzione (relazioni analoghe valgono per gli altri coefficienti variabili di produzione, esclusi $a_i, b_i, \dots$ che vengono determinati tramite le funzioni di produzione). Solo se queste condizioni sono soddisfatte nella allocazione iniziale, allora i coefficienti di produzione che vi corrispondono assicurano un massimo di utilità per la collettività. Pareto dimostra come esse siano richieste dall'equilibrio concorrenziale, deducendone che la libera concorrenza assicura un massimo di utilità per la collettività⁷.

Si noti come con questa analisi Pareto introduca tre modi diversi per rappresentare il massimo di utilità per la collettività in relazione alle scelte produttive. Questo richiede che ogni modificazione infinitesima dei coefficienti di produzione compatibile con le funzioni di produzione: a) danneggi necessariamente almeno un individuo se avvantaggia qualcun'altro; b) annulli la variazione equivalente, in termini utilitari, della quantità di un bene⁸; c) non accresca il profitto totale di produzione (valutato ai prezzi impliciti nell'allocazione inizia-

⁷ Infatti, poiché nella concorrenza

$$\begin{aligned} R_i &= a_i R_a + b_i R_b + \dots, & R_s &= a_s R_a + b_s R_b + \dots, & \dots \\ 1 &= p_a = p_i a_i + p_s a_s + \dots, & p_b &= p_i b_i + p_s b_s + \dots, & \dots \end{aligned}$$

risulta (tenendo conto delle funzioni di produzione $a_i = a_i(a_s, a_v, \dots)$, ...) che

$$\frac{\partial R_i}{\partial a_s} = R_a \frac{\partial a_i}{\partial a_s} + a_i \frac{\partial R_a}{\partial a_s} + b_i \frac{\partial R_b}{\partial a_s} + \dots$$

$$\frac{\partial R_s}{\partial a_s} = R_a + a_s \frac{\partial R_a}{\partial a_s} + b_s \frac{\partial R_b}{\partial a_s} + \dots$$

$$\frac{\partial R_v}{\partial a_s} = a_v \frac{\partial R_a}{\partial a_s} + b_v \frac{\partial R_b}{\partial a_s} + \dots$$

e quindi

$$p_i \frac{\partial R_i}{\partial a_s} + p_s \frac{\partial R_s}{\partial a_s} + \dots = p_i R_a \frac{\partial a_i}{\partial a_s} + p_s R_a + (p_i a_i + p_s a_s + \dots) \frac{\partial R_a}{\partial a_s} + \dots$$

cioè

$$\frac{\partial R_a}{\partial a_s} + p_b \frac{\partial R_b}{\partial a_s} + \dots - p_i \frac{\partial R_i}{\partial a_s} - p_s \frac{\partial R_s}{\partial a_s} - \dots = -R_a (p_i \frac{\partial a_i}{\partial a_s} + p_s).$$

Ricordando che nella libera concorrenza i coefficienti di produzione vengono scelti minimizzando il costo di produzione, per cui $p_i \frac{\partial a_i}{\partial a_s} + p_s = 0, \dots$, risulta che l'equilibrio concorrenziale soddisfa la condizione di massima utilità per la collettività.

⁸ Questa espressione è imprecisa per almeno due aspetti. Come verrà indicato nel seguito (ai nn. 4 e 5) più estesamente seguendo l'insegnamento di Allais [1989, §§ 420-429], si dovrebbe porre «non renda positiva» al posto di «annulli» e sostituire la nozione di «surplus distribuibile» a quella di «surplus equivalente».

le). Tuttavia, Pareto considera soltanto proprietà locali (cioè variazioni infinitesime dei coefficienti di produzione) e trascura le condizioni di secondo ordine. Peraltro Pareto, con l'articolo del 1894, introduce non solo la definizione di massima utilità per la collettività e il teorema che l'equilibrio concorrenziale è un massimo di utilità per la collettività ma anche, esplicitamente, la teoria delle scelte produttive dello stato collettivista⁹. Il celebre articolo di Barone [1908] sul «Ministro della produzione nello stato collettivista» è fondato su una parte di questa prima fase della ricerca di Pareto sul tema, poiché impiega soltanto il terzo modo di rappresentazione del massimo di utilità per la collettività (quello per cui la scelta ottima di produzione massimizza, a prezzi dati, il profitto totale).

3. Il massimo di ofelimità per la collettività nell'economia di puro scambio

Pareto, mentre con l'articolo del 1894 e con le analisi successive ricordate nel paragrafo precedente considera i possibili valori dei coefficienti di produzione per individuare quelli che determinano il massimo di utilità (ofelimità, con la terminologia introdotta nel *Cours*) nel *Cours* considera anche, al medesimo fine, i possibili regimi di mercato (in particolare il monopolio puro e la concorrenza perfetta) e dimostra come la concorrenza perfetta rappresenti, al contrario del monopolio, un massimo di ofelimità per la collettività. Tuttavia, il problema viene introdotto nei §§ 141-144 in modo alquanto ellittico. Qualche chiarimento e uno spunto analitico molto interessante si trovano nel proseguimento della nota al § 144 che Pareto aggiunse in appendice al secondo volume. Il problema è esposto molto più chiaramente nell'articolo del 1902, che è una risposta polemica alle critiche al riguardo di Scorza.

L'analisi al fondo della nota al § 144 del *Cours*, benché non sia presentata esplicitamente come un modo per determinare il massimo di ofelimità per la collettività nello scambio, è quanto mai interessante. Pareto considera un governo socialista che deve ripartire fra gli individui beni esistenti in quantità date. Per ottenere questa ripartizione Pareto suppone «per un momento che le ofelimità siano comparabili e che $a_2\varphi_{2a}, a_3\varphi_{3a}, \dots a_2\varphi_{2b}, \dots$ rappresentino $\varphi_{2a}, \varphi_{3a}, \dots \varphi_{2b}$

⁹ Si vedano anche i §§ 720-721 e 1013-1023 del *Cours*. Wieser [1889] aveva già confrontato il regime di concorrenza con quello dello stato collettivista. Però la sua analisi è limitata alla determinazione dei valori dei fattori di produzione a partire da quelli dei prodotti. Se una utilità collettiva è implicita nel discorso di Wieser, questa non può che essere la funzione di benessere sociale di Bentham: cfr. Montesano [1982].

... espresse nella stessa unità di φ_{1a} », introduce cioè la funzione del benessere sociale

$$W = \Phi_1 + a_2 \Phi_2 + a_3 \Phi_3 + \dots,$$

ove $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ sono le ofelimità totali agli individui e $\varphi_{1a}, \varphi_{1b}, \dots, \varphi_{2a}, \varphi_{2b}$ le corrispondenti ofelimità marginali. Il problema in esame conduce alle condizioni del primo ordine

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \dots &= a \\ y_1 + y_2 + y_3 + \dots &= b \\ z_1 + z_2 + z_3 + \dots &= c \\ \varphi_{1a} &= \lambda, & \varphi_{1b} &= \mu, & \varphi_{1c} &= \nu, \\ a_2 \varphi_{2a} &= \lambda, & a_2 \varphi_{2b} &= \mu, & a_2 \varphi_{2c} &= \nu, \\ a_3 \varphi_{3a} &= \lambda, & a_3 \varphi_{3b} &= \mu, & a_3 \varphi_{3c} &= \nu, \end{aligned}$$

ove $x_1, x_2, \dots$ sono per ciascun individuo le quantità del bene A , che è disponibile in quantità a , $y_1, y_2, \dots$, ecc., dalle quali Pareto trae le relazioni seguenti, che non dipendono dai coefficienti $a_2, a_3, \dots$ (rappresentanti le comparazioni interpersonali di utilità)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\mu} &= \frac{\varphi_{1a}}{\varphi_{1b}} = \frac{\varphi_{2a}}{\varphi_{2b}} = \dots \\ \frac{\lambda}{\nu} &= \frac{\varphi_{1a}}{\varphi_{1c}} = \frac{\varphi_{2a}}{\varphi_{2c}} = \dots \end{aligned}$$

Pareto non solo scrive che le grandezze ausiliarie λ, μ, ν (per noi, prezzi ombra) coincidono con i prezzi dell'economia di proprietà privata, ma anche che le condizioni che è possibile scrivere escludendo i coefficienti $a_2, a_3, \dots$ non sono sufficienti a determinare completamente l'allocazione. L'unica cosa che Pareto non scrive esplicitamente è che queste relazioni sono le condizioni di massima ofelimità per la collettività. Tuttavia, sia il tipo di ragionamento (il caso dello stato socialista viene usato costantemente da Pareto per determinare il massimo di ofelimità per la collettività) sia la collocazione della nota (in calce al § 144, che distingue i massimi di ofelimità individuali nel regime di monopolio da quelli in regime di concorrenza) fanno ritenere che Pareto avesse in mente proprio la loro determinazione. La possibilità di determinare le condizioni di massima di ofelimità per la collettività partendo da una generica funzione di benessere sociale verrà esaminata nel par. 5.

Nell'articolo del 1902 Pareto considera una economia di puro

scambio che si trova dapprima inizialmente in un equilibrio concorrenziale. Pareto dimostra che non esiste alcuna variazione delle grandezze di equilibrio (prezzi e quantità) compatibile con i vincoli di bilancio individuali e di disponibilità totale dei beni che possa accrescere l'ofelimità di un individuo senza diminuire quella di un altro individuo. L'equilibrio concorrenziale viene descritto con le equazioni

$$\begin{aligned} \varphi_{ia} &= \frac{1}{p_b} \varphi_{ib} = \frac{1}{p_c} \varphi_{ic} \dots & i &= 1, \dots, n, \\ q_{ia} + p_b q_{ib} + p_c q_{ic} + \dots &= 0, & i &= 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n q_{ia} &= 0, & \sum_{i=1}^n q_{ib} &= 0, \dots \end{aligned}$$

ove q_{ia} è l'eccesso di domanda del bene A per l'individuo i -esimo, ecc. L'allocatione dei beni viene modificata considerando le grandezze $q_{ia} + dq_{ia}, \dots, p_b + dp_b, \dots$, tali da soddisfare le condizioni

$$\begin{aligned} dq_{ia} + p_b dq_{ib} + p_c dq_{ic} + \dots + q_{ib} dp_b + q_{ic} dp_c + \dots &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n dq_{ia} &= 0, & \sum_{i=1}^n dq_{ib} &= 0, \dots \end{aligned}$$

Poiché

$$d\Phi_i = \varphi_{ia} dq_{ia} + \varphi_{ib} dq_{ib} + \dots, \quad i = 1, \dots, n,$$

risulta

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\varphi_{ia}} d\Phi_i = 0,$$

per cui, al livello delle variazioni di primo ordine delle ofelimità¹⁰, si ricava che le ofelimità non possono tutte crescere o diminuire. Questo risultato dipende dal fatto che l'equilibrio concorrenziale richiede che le condizioni

¹⁰ Pareto trascura gli effetti di secondo ordine o, meglio, compie imperfettamente l'analisi degli effetti di secondo ordine usando per di più una terminologia molto imprecisa. Egli non tiene conto che una variazione infinitesima di una variabile indipendente provoca effetti non solo di primo ordine, ma anche di ordine successivo, sulla variabile dipendente, cioè considerando la funzione $f(x)$,

$$f(x+dx) - f(x) = f'(x) dx + \frac{1}{2} f''(x) dx^2 + \frac{1}{6} f'''(x) dx^3 + \dots$$

Inoltre, quando considera variazioni finite (anziché infinitesime), si limita a considerare, insieme con gli effetti di primo ordine, quelli di secondo ordine (con variazioni finite ciò non è, ovviamente, sufficiente). (Al riguardo, anche, *Manuale*, App. § 48 e App.

$$\varphi_{ia} = \frac{1}{p_b} \varphi_{ib} = \frac{1}{p_c} \varphi_{ic} = \dots$$

valgano per tutti gli individui, mentre il monopolio esclude almeno una di esse. La nozione paretiana di massima ofelimità per la collettività risulta ben chiara nella successiva [Pareto 1902, 421-430] descrizione del caso con due beni e due individui. Pareto dimostra [*ibidem*, 422] come tutte le allocazioni in cui le curve di indifferenza dei due individui sono tangenti¹¹ soddisfano la condizione indicata (esse costituiscono «il luogo dei massimi di ofelimità»¹²), come nel caso dello scambio a prezzi costanti l'equilibrio concorrenziale è «un punto di quel luogo», e come altri regimi di scambio «opportunamente scelti» possano condurre ad un massimo di ofelimità per la collettività. Dimostra, inoltre, come il monopolio, il cui equilibrio non soddisfa la condizione di tangenza fra le curve individuali di indifferenza, non sia un tale massimo di ofelimità e mostra, con un esempio numerico [*ibidem*, 427-429], come a partire dall'equilibrio di monopolio esistano scambi ulteriori (a prezzi diversi da quelli di monopolio) che accrescono l'ofelimità di entrambi gli individui¹³.

all'ed. del 1909 §§ 121-126). L'analisi di Pareto richiede che si intenda che con il termine «variazioni infinitesime» si considerino gli effetti di primo ordine e con il termine «variazioni finite» gli effetti di secondo ordine. Con questa avvertenza può affermarsi che Pareto studia anche, sebbene imperfettamente, gli effetti di secondo ordine deducendo che a partire da una situazione di massima ofelimità per la collettività le ofelimità individuali possono anche diminuire, ma non crescere tutte, ossia è escluso soltanto che qualche ofelimità cresca senza che qualcun'altra diminuisca. Seguendo l'avvertenza terminologica indicata, l'imperfezione dell'analisi di Pareto sulle condizioni di secondo ordine è duplice. Da un lato, egli non determina condizioni di secondo ordine, ma descrive un caso in cui queste sono soddisfatte (è il caso delle funzioni di utilità strettamente concave). Dall'altro lato, seguendo il criterio del «surplus equivalente» anziché quello del «surplus distribuibile», non avrebbe potuto trovare condizioni di secondo ordine valide per il massimo di ofelimità per la collettività (questo problema è esaminato nel n. 5).

¹¹ Pareto non indica alcuna condizione sulla curvatura delle curve di indifferenza. Egli peraltro considera sempre curve di indifferenza convesse.

¹² La più importante obiezione che Samuelson [1947, 214] muove alla esposizione di Pareto è «his lack of emphasis upon the fact that an optimum point, in his sense, is not a unique point». La carenza di enfasi non è una critica importante se si ritiene che manchi solo l'enfasi. Se si sottintende che Pareto non sapesse che il massimo di ofelimità per la collettività non è unico il passo citato in testo, pur non essendo l'unico ricordabile, chiarisce definitivamente la questione.

¹³ Scorza nella sua replica [Scorza 1903] all'articolo di Pareto commette un singolare errore. Egli ipotizza [*ibidem*, 60], per una economia di puro scambio con due individui e due beni, che vi siano due equilibri concorrenziali A e B, tali che entrambi gli individui preferiscono A e B. Però questo caso, che contrasterebbe con la tesi di Pareto, è economicamente assurdo. Infatti, usando la logica delle preferenze rivelate, se x_{1A} è preferito a x_{1B} ove x_{1A} indica il vettore (con due elementi) delle quantità di beni

4. La teoria paretiana matura del massimo di ofelimità per la collettività

Nel *Manuale* (in particolare nella Appendice all'edizione francese del 1909) si trovano le formulazioni definitive di Pareto in tema di massimo di ofelimità per la collettività. Anche nel *Manuale* Pareto si limita quasi sempre a considerare gli spostamenti nell'intorno delle allocazioni in esame e a valutare di questi soltanto gli effetti di primo ordine. Una analisi corretta richiederebbe la considerazione anche degli effetti di secondo ordine e una completa quella degli spostamenti qualsiasi (quindi, non solo infinitesimi)¹⁴.

La definizione generale che Pareto indica per il massimo di ofelimità è contenuta nel § 33 del Cap. VI: «Diremo che i componenti di una collettività godono, in una certa posizione, del *massimo di ofelimità*, quando è impossibile allontanarsi pochissimo da quella posizione giovando, o nuocendo, a tutti i componenti la collettività». (Questa definizione è ribadita, tenendo conto di ofelimità che restino costanti, nel § 89 della Appendice all'edizione 1909). Tenendo conto di spostamenti qualsiasi la definizione delle allocazioni Pareto-massimali viene oggi indicata nei termini seguenti: una allocazione è Pareto-massimale se non esiste alcuna altra allocazione ammissibile che sia preferita ad essa da almeno un individuo e non meno preferita da tutti gli individui.

Subito dopo Pareto, introdotto per una economia di scambio con due beni e due individui il diagramma a scatola, che prenderà poi il nome di Edgeworth¹⁵, mostra come si abbia il massimo di ofelimità nei punti di tangenza delle curve di indifferenza e come l'equilibrio di monopolio ne sia al di fuori.

L'analisi del massimo di ofelimità nella produzione (§§ 52-61 del Cap. VI) è compiuta secondo lo schema già indicato nel n. 2. Un caso interessante trattato da Pareto (in linea con le trattazioni di Dupuit [1844 e 1849] e di Hotelling [1938]) riguarda le produzioni con costo fisso positivo e costo marginale costante. Pareto indica come la posizione di massima ofelimità non possa essere raggiunta dalla libera concorrenza, mentre può condurvi lo stato: nel § 58 scrive, fra l'altro,

del primo individuo nell'equilibrio A , ecc., allora deve essere $p_B \cdot x_{1B} < p_B \cdot x_{1A}$ (essendo x_{1A} preferito a x_{1B} ed essendo x_{1B} scelto ai prezzi p_B , x_{1B} non può che essere, a questi prezzi, meno costoso che x_{1A}). Analogamente $p_B \cdot x_{2B} < p_B \cdot x_{2A}$. Sommando le due disequazioni si trova $p_B \cdot (x_{1B} + x_{2B}) < p_B \cdot (x_{1A} + x_{2A})$ che è in contraddizione con l'uguaglianza $x_{1B} + x_{2B} = x_{1A} + x_{2A}$ (richiesta poiché indica che le quantità totali disponibili dei beni sono necessariamente uguali nei due equilibri).

¹⁴ Come già indicato nella nota 10 Pareto confonde in qualche modo gli spostamenti finiti con l'analisi degli effetti di secondo ordine.

¹⁵ Jaffé [1972, 1190] e Allais [1989, § 218 nota 218, 7] illustrano come l'invenzione di questo diagramma sia dovuta a Pareto.

che «lo Stato socialista invece può imporre, come tributo, sui consumatori di una mercè, le spese generali [ossia, il costo fisso] della produzione di detta mercè, e poi cederla al prezzo di costo [marginale]».

Nella Appendice del *Manuale* (conviene riferirsi a quella dell'edizione del 1909, che è più elaborata e lunga di quella dell'edizione del 1906), ove i temi vengono discussi in termini matematici, non è tanto rilevante l'analisi del massimo di ofelimità nella produzione, che è condotta anche per il caso generale con prezzi variabili, quanto la spiegazione del significato del differenziale che egli usa come criterio per determinare il massimo di ofelimità per la collettività, cioè ¹⁶

$$dS = \frac{1}{\varphi_{1a}} d\Phi_1 + \frac{1}{\varphi_{2a}} d\Phi_2 + \dots$$

Come peraltro già anticipato nel n. 2, la definizione $ds_1 = \frac{1}{\varphi_{1a}}$

$d\Phi_1$ significa che (§ 127) «il consumo delle quantità di merci $dx_1, dy_1, \dots$, procura all'individuo 1, un incremento di ofelimità (o di indice di ofelimità) uguale a quello che questo individuo trarrebbe dal consumo della quantità ds_1 della merce A ». Conseguentemente

$$dS = ds_1 + ds_2 + \dots$$

rappresenta (§ 129) «la quantità di merce A , che, se fosse distribuita ai membri della collettività, procurerebbe a ciascuno lo stesso piacere che gli procura il consumo effettivo delle merci $dx_1, dy_1, \dots, dx_2, \dots$. È evidente che [quando] abbiamo valori positivi per $[dS]$, possiamo [...] aumentare il benessere di tutti i membri della collettività; [...] Quando il valore di dS diviene zero, noi non abbiamo [...] merce da distribuire ai membri della collettività. Se vogliamo aumentare la quota di alcuni di loro, possiamo farlo solo riducendo la quota di qualcun altro».

La variazione della quantità di merce A che Pareto indica con dS è stata denominata da Allais [1989, § 421] «surplus equivalente» poiché Pareto la determina in base alla condizione di uguaglianza delle ofelimità individuali corrispondenti alle due allocazioni seguenti: quella ottenuta con lo spostamento generico dalla allocazione iniziale (che è quella di cui si vuole saggiare la proprietà di massima ofelimità per la collettività) e quella ottenuta aggiungendo alla allocazione iniziale la quantità ds_1 della merce A al primo individuo, ds_2 al secondo indivi-

¹⁶ Pareto usa due simboli « d » e « δ » per indicare i differenziali: δ quando considera variazioni qualsiasi (sebbene compatibili con i vincoli di disponibilità e di produzione), d quando considera variazioni lungo un sentiero particolare (ad esempio, tenendo conto anche dei vincoli derivanti da un tipo specifico di regime di mercato). Questa distinzione non viene seguita in questo lavoro, che usa perciò sempre il simbolo « d ».

duo, ecc. Questo ragionamento può essere esteso considerando spostamenti qualsiasi (quindi non limitati all'intorno dell'allocazione iniziale) e si può definire il surplus equivalente come la quantità s di merce A ottenuta considerando le uguaglianze

$$\Phi_i(x'_i, y'_i, \dots, a'_i, b'_i, \dots) = \Phi_i(x_i + s_i, y_i, \dots, a_i, b_i, \dots)$$

ove $(x_i, y_i, \dots, a_i, b_i, \dots)$ indica il paniere dei beni consumati dall'individuo i -esimo nella situazione iniziale di cui si vuole saggiare se è un massimo di ofelimità per la collettività (le merci $X, Y, \dots$ sono prodotti, le merci $A, B, \dots$ sono beni usati anche come fattori di produzione) e $(x'_i, y'_i, \dots, a'_i, b'_i, \dots)$ quello della generica situazione posta a confronto con quella iniziale. (Nel seguito, l'allocazione iniziale viene indicata con α , quella a confronto con α'). Entrambe queste allocazioni devono essere ammissibili, devono cioè soddisfare i vincoli di disponibilità e di produzione. Ossia; assumendo per semplicità con Pareto che la dotazione iniziale di prodotti sia nulla e indicando con

$$x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i, \quad \dots, \quad x' = \sum_{i=1}^n x'_i, \quad y' = \sum_{i=1}^n y'_i, \quad \dots$$

le quantità totali dei prodotti e con

$$a = a_0 - \sum_{i=1}^n a_i, \quad b = b_0 - \sum_{i=1}^n b_i, \quad \dots,$$

$$a' = a_0 - \sum_{i=1}^n a'_i, \quad b' = b_0 - \sum_{i=1}^n b'_i, \quad \dots$$

le quantità totali dei fattori della produzione ($a_0, b_0, \dots$ sono le dotazioni dei beni $A, B, \dots$), i vettori $(x, y, \dots, a, b, \dots)$ e $(x', y', \dots, a', b', \dots)$ devono rappresentare produzioni totali tecnicamente possibili (cioè, appartenere all'insieme totale di produzione). Allora, la quantità

$$s = \sum_{i=1}^n s_i$$

rappresenta il «surplus equivalente» della allocazione α' rispetto alla allocazione α . Pareto indica che per allocazioni α' prossime a α , cioè con $\alpha' = \alpha + d\alpha$ (α e α' sono rappresentate da vettori), risulta $ds = 0$ se l'allocazione α è un massimo di ofelimità per la collettività¹⁷.

¹⁷ Si noti come la discussione precedente, determinando ds a partire da s , risolveva *ab imis* la questione della integrabilità del differenziale

$$ds = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\varphi_{is}} d\Phi_i$$

sollevata da Samuelson [1947, 213-214]. L'analisi definitiva di questo problema è dovuta ad Allais [1989, § 421 nota 421, 4; § 428; e §§ 611-612].

Allais ha modificato l'analisi di Pareto considerando il «surplus distribuibile»

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

ove σ_i è definito dalle uguaglianze

$$\Phi_i(x'_i - \sigma_i, y'_i, \dots, a'_i, b'_i, \dots) = \Phi_i(x_i, y_i, \dots, a_i, b_i, \dots).$$

Si può dimostrare (come sarà fatto fra poco nel n. 5) che se α è un massimo di ofelimità per la collettività e l'ofelimità di ogni individuo è funzione crescente di x , allora nessuna allocazione ammissibile α' può rendere σ positivo. Le condizioni locali del massimo di ofelimità per la collettività (sia di primo che di secondo ordine) possono allora essere ottenute ricercando il massimo di σ rispetto ad α' . (Si noti come, muovendosi nell'intorno di α e tenendo conto solo degli effetti di primo ordine, le variazioni di s e di σ siano uguali, cioè $d\sigma = ds$, e risulti quindi $d\sigma = ds = 0$).

Pareto, perciò, attribuisce al differenziale $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\varphi_{ia}} d\Phi_i$, con cui

saggia la proprietà di massima ofelimità per la collettività, la natura di un «surplus» di merce A , che non può essere positivo nelle allocazioni alternative a quella in esame, se questa è un massimo di ofelimità.

Anche se nella nota al § 144 del *Cours* (ricordata nel n. 3) Pareto determina in un caso le condizioni di massima ofelimità per la collettività partendo da una funzione di benessere sociale indeterminata e sia possibile generalizzare questo spunto (come verrà indicato nel n.

5), Pareto non riferisce mai il differenziale $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\varphi_{ia}} d\Phi_i$ ad una funzione del benessere sociale. Anche quando questa viene considerata

espressamente [Pareto 1913] e viene indicato un differenziale $\sum_{i=1}^n \alpha_i d\Phi_i$,

simile al precedente (e da cui scaturiscono condizioni del primo ordine identiche), Pareto esclude la nozione di benessere sociale dalla sfera economica per attribuirle a quella sociologica senza tener conto della possibilità di determinare l'insieme dei massimi di ofelimità per mezzo di una funzione indeterminata di benessere sociale. Allo stesso modo, Pareto non considera la possibilità di determinare il massimo di ofelimità per la collettività per mezzo della condizione di massimo dell'ofelimità di un individuo sotto il vincolo che le ofelimità degli altri individui non diminuiscano ¹⁸.

¹⁸ Questo è il criterio che viene seguito da Lange [1942]. Una anticipazione è fornita da Edgeworth [1881, 27] con la nozione di «massimo relativo delle utilità».

Pertanto, in sintesi, Pareto fornisce la definizione di massima ofelimità per la collettività; indica il criterio del «surplus equivalente» per il suo accertamento, trascurando altri criteri possibili; limita la sua analisi all'intorno delle allocazioni sotto esame; e considera gli effetti del primo ordine. Sebbene il contributo di Pareto sia stato altamente innovativo e superiore di gran lunga a quello degli altri economisti almeno fino agli anni quaranta, tuttavia la sua analisi non è completa e precisa. La definizione dell'insieme delle allocazioni Pareto-massimali (cioè delle allocazioni che sono massimi di ofelimità per la collettività) verrà indicata in termini generali nel n. seguente in diversi modi alternativi e ne verrà dimostrata la mutua equivalenza.

5. Una formulazione generale delle definizioni alternative dell'insieme delle allocazioni Pareto-massimali

Si consideri una economia composta da n consumatori, m imprese e k beni. Ogni consumatore abbia un paniere di beni, rappresentato da un vettore non negativo dello spazio euclideo a k dimensioni: $x_i \in R_+^k$, $i = 1, \dots, n$. Si indichi con $(x_i) \in R_+^{kn}$ l'allocazione di consumo, ove $(x_i) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ rappresenta i consumi di tutti gli individui. Ogni impresa produca un paniere di beni, rappresentato da un vettore (i cui elementi positivi indicano quantità prodotte e quelli negativi quantità utilizzate di beni) appartenente all'insieme di produzione, che riunisce i panieri consentiti dalle possibilità tecniche di produzione: $y_j \in Y_j$, ove $Y_j \subseteq R^k$, $j = 1, \dots, m$. Il numero delle imprese è dato, può essere molto grande e alcune imprese possono essere inoperanti (sono cioè produttori potenziali). Si definisca l'insieme di produzione totale $Y = \sum_{j=1}^m y_j$, composto cioè da vettori tali che se $y_j \in Y_j$, $j = 1, \dots, m$, allora $\sum_{j=1}^m y_j \in Y$; perciò, se $y \in Y$, allora esiste una allocazione di produzione (y_j) per cui $\sum_{j=1}^m y_j = y$. (Nel seguito viene considerata soltanto la produzione totale dal momento che ad ogni $y \in Y$ corrisponde sempre almeno una allocazione (y_j) con $y_j \in Y_j$ per $j = 1, \dots, m$ e quale sia questa allocazione, se ve ne è più di una, è del tutto irrilevante ai fini delle condizioni di Pareto-massimalità, che concernono soltanto i consumatori.) Sia la dotazione di beni dell'economia rappresentata dal vettore semipositivo $\omega \in R_+^k$. L'insieme totale di consumo (consentito dalla produzione e dalla disponibilità di beni) è allora

$$X = (Y + \{\omega\}) \cap R_+^k$$

ove R_+^k è l'ortante non negativo dello spazio euclideo a k dimensioni. Sia, per ipotesi, l'insieme X non vuoto e compatto. Una allocazione di consumo, indicata con il vettore (x_i) , è ammissibile se la quantità totale di consumo, che è $\sum_{i=1}^n x_i$, è un vettore appartenente a X : l'insieme delle allocazioni ammissibili è allora

$$A = \{(x_i) \in R_+^{kn} : \sum_{i=1}^n x_i \in X\}.$$

Abbiamo ogni consumatore preferenze rappresentate da un preordinamento regolare, cioè completo (per ogni coppia x_i, x'_i si ha $x_i \succ_i x'_i$ e/o $x'_i \succ_i x_i$, ove il simbolo $\succ_i$ significa «non meno preferito dal consumatore i -esimo»), riflessivo (per ogni x_i , si ha $x_i \succ_i x_i$) e transitivo (per ogni terna x_i, x'_i, x''_i , se è $x_i \succ_i x'_i$ e $x'_i \succ_i x''_i$, allora $x_i \succ_i x''_i$). Si indichi poi con $x_i \succeq_i x'_i$ la relazione di preferenza forte, cioè se è $x_i \succ_i x'_i$ e non è $x'_i \succ_i x_i$, e con $x_i \sim_i x'_i$ quella di indifferenza, cioè se è insieme $x_i \succeq_i x'_i$ e $x'_i \succeq_i x_i$, con $(x_i) \succeq (x'_i)$ la relazione di preferenza paretiana, cioè se è $x_i \succeq_i x'_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e $x_i \succeq_i x'_i$ per almeno un i , e con $(x_i) \sim (x'_i)$ quella di indifferenza, cioè $x_i \sim_i x'_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Quando occorra si ipotizzi che le preferenze siano rappresentabili con una funzione di utilità tale cioè che $U_i(x_i) \geq U_i(x'_i)$ se e solo se $x_i \succeq_i x'_i$.

Ciò premesso, la proprietà che definisce le allocazioni Pareto-massimali viene introdotta in quattro modi diversi, considerando i quattro insiemi seguenti.

a) L'insieme delle allocazioni Pareto-massimali

$$P = \{(x_i^*) \in A : (x_i) \succ (x_i^*) \text{ implica } (x_i) \notin A\}$$

riunisce le allocazioni di consumo rispetto alle quali non esistono, nell'insieme delle allocazioni ammissibili, allocazioni che, preferite da qualche consumatore, siano non meno preferite da tutti i consumatori.

b) L'insieme delle allocazioni di massimo surplus distribuibile

$$P_\sigma = \{(x_i^*) \in A : (x_i - \sigma_i) \sim (x_i^*) \text{ e } \sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i > 0 \text{ implicano } (x_i) \notin A\}$$

$$\text{implica } \sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i \leq 0\}$$

riunisce le allocazioni di consumo rispetto alle quali non esistono, nell'insieme delle allocazioni ammissibili, allocazioni indifferenti che richiedono una minore quantità di beni. Questa definizione richiede

che le preferenze dei consumatori siano continue e fortemente monotone.

c) L'insieme delle allocazioni di massimo benessere sociale

$P_W = \{(x_i^*) \in A : \text{esiste una } W : R^n \rightarrow R \text{ fortemente monotona tale che } W((U_i(x_i^*))) \geq W((U_i(x_i))) \text{ per ogni } (x_i) \in A\}$

riunisce le allocazioni di consumo che massimizzano qualche funzione di benessere sociale. Queste funzioni vengono definite come le funzioni fortemente monotone delle utilità individuali, tali cioè che $W((U_i)) > W((U_i'))$ se $(U_i) > (U_i')$, ossia se $U_i \geq U_i'$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e $U_i > U_i'$ per almeno un i . Non occorre che esse siano concave o quasi-concave e che le funzioni di utilità siano cardinali.

d) L'insieme delle allocazioni ottimali per un consumatore con vincoli sulle utilità degli altri consumatori

$$P_L = \{(x_i^*) \in A : U_j(x_j^*) \geq U_j(x_j) \text{ per ogni } (x_i) \in B((x_{-j}^*))\}$$

ove

$$B((x_{-j}^*)) = \{(x_i) \in A : U_i(x_i) \geq U_i(x_i^*) \text{ per } i \neq j \text{ e } i = 1, \dots, n\}.$$

Si noti come tutte e quattro queste definizioni indichino proprietà globali di Pareto-massimalità, da cui quelle locali (almeno per le ultime tre definizioni) sono facilmente deducibili.

Si dimostra ora come questi insiemi siano uguali, individuino cioè le medesime allocazioni ¹⁹.

¹⁹ Potrebbe sembrare che queste definizioni non individuino le allocazioni di produzione Pareto-massimali, ma solo quelle di consumo. Ciò non è vero poiché l'insieme A delle allocazioni ammissibili dipende dall'insieme Y di produzione totale. Perciò, l'allocatione di consumo (x_i) implica una produzione totale y (poiché $\sum_{i=1}^n x_i = y + \omega$) e, conseguentemente, almeno una allocazione di produzione (y_i) , tale che $\sum_{i=1}^n y_i = y$. Ad esempio, la definizione dell'insieme P_σ implica, fra l'altro, che y^* sia sulla frontiera di Y , cioè $y^* + t \notin Y$ per ogni settore $t > 0$: altrimenti sarebbe $(x_i^* + \frac{1}{n} t) \in A$ e la condizione $(x_i^* + \frac{1}{n} t - \sigma_j) \sim (x_i^*)$ darebbe $\sigma_i = \frac{t}{n}$ e $\sigma = t > 0$. Le definizioni indicate richiedono, quando è possibile, l'uguaglianza per ogni coppia di beni fra i saggi di sostituzione di tutti i consumatori e tutte le imprese, quindi, fra l'altro, che vengano soddisfatte le condizioni di primo ordine per il massimo di profitto (sebbene non si richieda necessariamente che questo sia massimo), come determinato da Pareto già nel 1894. Infatti l'insieme delle allocazioni Pareto-massimali può essere indicato come

$$P = \{(x_i^*) \in A : G((x_i^*)) \cap X = \emptyset\}$$

ove $G((x_i^*))$ è l'insieme dei consumi totali preferiti a (x_i^*) , cioè

TEOREMA 1²⁰: $P_\sigma = P$.

Si dimostra dapprima come sia $P \subseteq P_\sigma$ e poi $P_\sigma \subseteq P$.

Esista per assurdo una allocazione tale che $(x_i^*) \in P$ e $(x_i^*) \notin P_\sigma$. Allora esisterebbe un'altra allocazione $(x_i) \in A$ tale che $\sigma > 0$, ove $\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i$ e le σ_i sono ottenuti dalla condizione $(x_i - \sigma_i) \sim (x_i^*)$. Ne consegue che esisterebbe una ulteriore allocazione (x_i') , ove $x_i' = x_i - \sigma_i + \frac{1}{n} \sigma$, che non solo è ammissibile, poiché $\sum_{i=1}^n x_i' = \sum_{i=1}^n x_i$, ma che è anche migliore di (x_i^*) : infatti, essendo le preferenze fortemente monotone, poiché $x_i - \sigma_i \sim_i x_i^*$ e $\frac{1}{n} \sigma > 0$, si avrebbe $x_i' >_i x_i^*$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Perciò, sarebbe $(x_i^*) \notin P$, in contraddizione con l'ipotesi.

Esista ora per assurdo una allocazione tale che $(x_i^*) \in P_\sigma$ e $(x_i^*) \notin P$. Deve allora esistere un'altra allocazione $(x_i) \in A$ tale che $(x_i) \succ (x_i^*)$. Poiché le preferenze sono continue e fortemente monotone vi sono allora $\sigma_i \geq 0$ per $i = 1, \dots, n$ con $\sigma_i > 0$ per almeno un i tali che $(x_i - \sigma_i) \sim (x_i^*)$. Ma allora si ha $\sum_{i=1}^n \sigma_i = \sigma > 0$, in contraddizione con l'ipotesi che $(x_i^*) \in P_\sigma$.

COROLLARIO: se si considera il surplus equivalente (seguendo l'interpretazione originaria di Pareto) invece che il surplus distribuibile e si definisce l'insieme (che può anche risultare vuoto)

$$G((x_i^*)) = \sum_{i=1}^n G_i(x_i^*) \text{ con } G_i(x_i^*) = \{x_i : x_i >_i x_i^*\}.$$

Se l'insieme $G((x_i^*))$ è chiuso e convesso e l'insieme X è convesso, allora esiste un iperpiano che li separa e si deducono le analisi e i teoremi indicati da Debreu [1959, 90-97]. Se manca la convessità, non solo P è ancora definibile, ma esiste ancora un iperpiano che è tangente sia all'insieme $G((x_i^*))$ che all'insieme X nell'intorno di $x^* = \sum_{i=1}^n x_i^*$ in R_+^k . (Qui, per «iperpiano tangente» si intende che tutti i punti dell'insieme in esame nell'intorno del punto di tangenza giacciono nello stesso semi-iperpiano). Questo iperpiano (che non è necessariamente di separazione, neppure localmente) definisce con i suoi coefficienti angolari un vettore di prezzi-ombra rispetto a cui la produzione totale $y^* = x^* - \omega$ e le produzioni delle imprese y_i^* (con $\sum_{i=1}^n y_i^* = y^*$) determinano per la funzione del profitto un differenziale primo (quando esiste), a prezzi costanti, nullo.

²⁰ Ovviamente occorre che l'insieme P_σ sia definibile, cioè che le preferenze individuali siano continue e fortemente monotone.

$$P_s = \{(x_i^*) \in A : (x_i) \sim (x_i^* + s_i) \text{ e } s = \sum_{i=1}^n s_i > 0 \text{ implicano } (x_i) \notin A\}$$

delle allocazioni di massimo surplus equivalente, si trova che è, in generale, $P_s \neq P_\sigma$ e, quindi $P_s \neq P$. Infatti, se gli insiemi P_σ e P_s contengono entrambi le due allocazioni (x_i^*) e $(\hat{x}_i)$, e queste hanno una quantità sufficiente di un bene (ad esempio un bene composito $q \in R_+^k$) in modo che le condizioni $(\hat{x}_i - \hat{\sigma}q) \sim (x_i^*)$ e $(x_i^* - \sigma_i^*q) \sim (\hat{x}_i)$ sono soddisfatte anche se sono richiesti valori positivi di σ_i^* e $\hat{\sigma}$, allora si avrebbe, da un lato, $(\hat{x}_i) \sim (x_i^* + \hat{s}_i q)$ e $(\hat{x}_i - \hat{\sigma}q) \sim (x_i^*)$ e, dall'altro lato, $(x_i^*) \sim (\hat{x}_i + s_i^* q)$ e $(x_i^* - \sigma_i^* q) \sim (\hat{x}_i)$. Risulterebbe perciò $s_i^* = -\hat{\sigma}$ e $\hat{s}_i = -\sigma_i^*$, per cui $s^* = -\hat{\sigma}$ e $\hat{s} = -\sigma^*$. Allora, essendo $\sigma^* \leq 0$ e $\hat{\sigma} \leq 0$, deve essere $\hat{s} \geq 0$ e $s^* \geq 0$. Conseguentemente, se appena è $\sigma^* < 0$ e/o $\hat{\sigma} < 0$ (come accade normalmente), deve essere $\hat{s} > 0$ e/o $s^* > 0$, per cui $(\hat{x}_i) \notin P_s$ e/o $(x_i^*) \notin P_s$.

Si noti come nell'intorno di ogni allocazione $(x_i^*) \in P_\sigma$, per spostamenti su A , il differenziale primo di s sia uguale a quello di σ , mentre ne è diverso il differenziale secondo²¹. (Si ricordi che Pareto definisce le condizioni di massimo surplus considerando soltanto il differenziale primo di s .)

Questo corollario può essere illustrato con un esempio numerico. Si consideri una economia di puro scambio con due consumatori e due beni: vi siano la dotazione $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = 1$ e le funzioni di utilità $U_1 = x_{11} x_{12}$ e $U_2 = x_{21} x_{22}$. Applicando il principio del surplus distribuibile una allocazione (x_i^*) è Pareto-massimale se massimizza σ rispetto ad ogni altra allocazione ammissibile $(x_i) \in A$, ove

$$A = \{x_{ij} \in [0, 1], i, j = 1, 2 : x_{11} + x_{21} = 1, x_{12} + x_{22} = 1\}.$$

Ponendo, allora, per $q = (1, 0)$

$$\begin{aligned} (x_{11} - \sigma_1) x_{12} &= x_{11}^* x_{12}^*, \\ (x_{21} - \sigma_2) x_{22} &= (1 - x_{11} - \sigma_2) (1 - x_{12}) = (1 - x_{11}^*) (1 - x_{12}^*). \end{aligned}$$

si ricava

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 1 - \frac{x_{11}^* x_{12}^*}{x_{12}} - \frac{(1 - x_{11}^*) (1 - x_{12}^*)}{1 - x_{12}}.$$

Perché σ sia massima per $x_{11} = x_{11}^*$ e $x_{12} = x_{12}^*$ occorre che $\frac{\partial \sigma}{\partial x_{12}}$

²¹ A questo riguardo si veda Allais [1989, § 213 e § 423].

sia nulla per $x_{12} = x_{12}^*$ (la derivata $\frac{\partial \sigma}{\partial x_{11}}$ è sempre nulla), condizione questa che richiede $x_{12}^* = x_{11}^*$. Allora l'insieme delle allocazioni Pareto-massimali è

$$P_{\sigma} = P = \{x_{ij}^* \in [0, 1], i, j = 1, 2 \text{ e } j = 1, 2 : x_{12}^* = x_{11}^*, x_{11}^* + x_{21}^* = 1, x_{12}^* + x_{22}^* = 1\}.$$

Considerando invece il surplus equivalente, si ha, sempre per $q = (1, 0)$

$$\begin{aligned} x_{11} x_{12} &= (x_{11}^* + s_1) x_{12}^*, \\ (1 - x_{11}) (1 - x_{12}) &= (1 - x_{11}^* + s_2) (1 - x_{12}^*), \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$s = s_1 + s_2 = -1 + \frac{x_{11} x_{12}}{x_{12}^*} + \frac{(1 - x_{11}) (1 - x_{12})}{1 - x_{12}^*}$$

che non è reso massimo dai punti di P_{σ} : ad esempio, per $x_{11}^* = x_{12}^* = \frac{1}{2}$ si ha $s = -1 + 2 x_{11} x_{12} + 2 (1 - x_{11}) (1 - x_{12}) =$

$= (1 - 2 x_{11}) (1 - 2 x_{12})$ ed è quindi $s > 0$ se x_{11} e x_{12} sono entrambi maggiori di $\frac{1}{2}$ o minori di $\frac{1}{2}$ e $s < 0$ in caso contrario

mentre è $s = 0$ per $x_{11} = x_{12} = \frac{1}{2}$. Peraltro, a partire da una alloca-

zione $(x_i^*) \in A$ e per spostamenti su A si trova che il differenziale primo di s coincide con quello di σ (ed è nullo se $(x_i^*) \in P_{\sigma}$):

$$\begin{aligned} ds &= \left(\frac{x_{12}}{x_{12}^*} - \frac{1 - x_{12}}{1 - x_{12}^*} \right) dx_{11} + \left(\frac{x_{11}}{x_{12}^*} - \frac{1 - x_{11}}{1 - x_{12}^*} \right) dx_{12} = \\ &= \left(\frac{x_{11}^*}{x_{12}^*} - \frac{1 - x_{11}^*}{1 - x_{12}^*} \right) dx_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left(\frac{x_{11}^* x_{12}^*}{x_{12}^2} - \frac{(1 - x_{11}^*) (1 - x_{12}^*)}{(1 - x_{12})^2} \right) dx_{12} = \\ &= \left(\frac{x_{11}^*}{x_{12}^*} - \frac{1 - x_{11}^*}{1 - x_{12}^*} \right) dx_{12}, \end{aligned}$$

mentre differisce quello di secondo ordine:

$$d^2s = 2 \left(\frac{1}{x_{12}^*} + \frac{1}{1 - x_{12}^*} \right) dx_{11} dx_{12},$$

$$d^2\sigma = -2 \left(\frac{x_{11}^*}{x_{12}^{*2}} + \frac{1 - x_{11}^*}{(1 - x_{12}^*)^2} \right) dx_{12}^2.$$

TEOREMA 2: $P_w = P$.

Si dimostra dapprima come sia $P_w \subseteq P$ e poi $P \subseteq P_w$.

Esista per assurdo una allocazione tale che $(x_i^*) \in P_w$ e $(x_i^*) \notin P$. Allora esisterebbe un'altra allocazione $(x_i) \in A$ tale che $(x_i) > (x_i^*)$ e, quindi, tale che per qualunque funzione W fortemente monotona si avrebbe $W((U_i(x_i))) > W((U_i(x_i^*)))$, perciò con $(x_i^*) \notin P_w$, in contraddizione con l'ipotesi.

Per dimostrare come sia $P \subseteq P_w$ si consideri una qualsiasi allocazione $(x_i^*) \in P$ e si ponga $U_i(x_i^*) = U_i^*$. Si introduca la funzione di benessere sociale

$$V = ((U_i - U_i^*)) + a \sum_{i=1}^n (U_i - U_i^*),$$

ove a è una costante positiva tale che $a < (\max_{(x_i) \in A} \sum_{i=1}^n (U_i(x_i) - U_i^*))^{-1}$ e $V((U_i - U_i^*))$ è una funzione tale che $V = 0$ quando $\min_i \{(U_i - U_i^*)\} \geq 0$ e $V = 1$ quando $\min_i \{(U_i - U_i^*)\} < 0$.

Questa funzione fortemente monotona è massimizzata da (x_i^*) su A poiché per ogni $(x_i) \in A$ si ha $\min_i \{(U_i - U_i^*)\} \leq 0$ e quindi risulta $W = 0$ se $(U_i(x_i)) = (U_i^*)$ e $W = -1 + a \sum_{i=1}^n (U_i - U_i^*) < 0$ se $(U_i(x_i)) \neq (U_i^*)$, mentre è $W^* = W((U_i^*)) = 0$.

Risulta quindi che se $(x_i^*) \in P$ allora è anche $(x_i^*) \in P_w$.

TEOREMA 3: $P_L = P$.

Si dimostra dapprima come sia $P \subseteq P_L$ e poi $P_L \subseteq P$.

Esista per assurdo una allocazione tale che $(x_i^*) \in P$ e $(x_i^*) \notin P_L$. Allora esisterebbe un'altra allocazione $(x_i) \in A$ tale che $U_j(x_j) > U_j(x_j^*)$ e $U_i(x_i) \geq U_i(x_i^*)$ per qualche $j = 1, \dots, n$ e ogni $i = 1, \dots, n$. Ma allora $(x_i) > (x_i^*)$, in contraddizione con l'ipotesi $(x_i^*) \in P$.

Esista ora per assurdo una allocazione tale che $(x_i^*) \in P_L$ e $(x_i^*) \notin P$. Allora esisterebbe un'altra allocazione $(x_i) \in A$ tale che $(x_i) >$

$> (x_i^*)$, cioè $U_i(x_i) \geq U_i(x_i^*)$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e $U_i(x_i) > U_i(x_i^*)$ per almeno un i . Risulterebbe perciò $(x_i^*) \notin P_L$, in contraddizione con l'ipotesi.

6. Conclusioni

La teoria paretiana del «massimo di ofelimità per la collettività» ha rappresentato un punto di svolta nell'analisi economica per due ragioni: perché ha escluso dall'economia le questioni extraeconomiche proprie dell'utilitarismo classico legate alla misura dell'utilità individuale e al confronto interpersonale di queste (che si ritrovano non solo nella tradizione benthamiana ma anche nell'insegnamento di Marshall e Pigou); e perché ha indicato un criterio generale, valido cioè per l'economia complessiva (e non soltanto per un bene o un agente, cioè in termini di analisi parziale, come proposto dal contributo pionieristico di Dupuit o da quello, pur successivo a Pareto, di Hotelling). Pareto, nel suo positivismo, ha interpretato la nozione di «massimo di ofelimità per la collettività» nei termini di una quantità di merce (misurabile oggettivamente) e non di una utilità sociale indefinita²², pur non essendogli ignota questa possibilità. Inoltre, mentre assoggetta al calcolo economico di efficienza l'allocazione dei beni, sia nel consumo che nella produzione, Pareto mostra come il problema della distribuzione sia, almeno parzialmente, estraneo a tale calcolo. Infatti, i punti dell'insieme delle allocazioni Pareto-massimali corrispondono ciascuno a una diversa distribuzione della ricchezza fra gli individui. (Questa è la ragione che colloca, nella determinazione dell'equilibrio concorrenziale, le dotazioni iniziali dei beni e le quote individuali sui profitti d'impresa fra i «dati»: la distribuzione in valore dei beni a disposizione degli individui, cioè dei loro redditi e patrimoni, dipende perciò sia dai prezzi sia dalle dotazioni, cioè sia da grandezze che risultano determinate dalla teoria economica sia da grandezze che la teoria economica prende come «date»).

La teoria paretiana considera soltanto le proprietà locali del «mas-

²² L'incomprensione di Samuelson [1947, 212-214] al riguardo è totale. Samuelson interpreta, come è possibile ma come non fa Pareto, il differenziale paretiano

$$dS = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\varphi_i} d\varphi_i$$

in termini utilitaristici (come differenziale dell'utilità sociale), calcola che la dimensione logica è quella della quantità del bene A , ma non comprende che nell'interpretazione di Pareto si tratta proprio di una quantità di bene A . Su questo punto Allais [1989, §§ 420-429].

simo di ofelimità per la collettività» e presenta due difetti: impiega la nozione di «surplus equivalente» invece che quella di «surplus distribuibile» e manca di una analisi soddisfacente delle condizioni di secondo ordine. (Peraltro, al livello delle condizioni di primo ordine il «surplus equivalente» e il «surplus distribuibile» conducono alle stesse relazioni.) Allais [1989] ha non solo chiarito l'analisi paretiana ma anche eliminato questi due difetti, rimanendo però nell'ambito dell'analisi locale. La definizione del «massimo di ofelimità per la collettività» in termini globali, proposta nel n. 5 di questo lavoro, mostra la perfetta equivalenza fra quattro possibili formulazioni.

Riferimenti bibliografici

- Allais, M. (1981, 1989²), *La théorie générale des surplus*, Grenoble, Presses Universitaires.
- (1985), *The Concepts of Surplus and Loss and the Reformulation of the Theories of Stable General Economic Equilibrium and Maximum Efficiency*, in *Foundations of Economics. Structures of Inquiry and Economic Theory*, a cura di M. Baranzini e R. Scazzieri, Oxford, Basil Blackwell, pp. 135-174.
- (1987), *The Equimarginal Principle. Meaning, Limits, and Generalization*, in «Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali», pp. 689-750.
- Barone, E. (1908), *Il ministro della produzione nello stato collettivista*, in «Giornale degli Economisti», settembre, pp. 267-294, e ottobre, pp. 391-414.
- Debreu, G. (1959), *Theory of Value*, New York, J. Wiley.
- Dupuit, J. (1844), *De la mesure de l'utilité des travaux publics*, in «Annales des Ponts et Chaussées», 2° serie, 2° semestre, Mémoires et Documents, n. 116, t. VIII, pp. 332-375.
- (1849), *De l'influence des péages sur l'utilité des voies de communication*, in «Annales des Ponts et Chaussées», 2° serie, n. 207, pp. 170-248.
- Edgeworth, F. Y. (1881), *Mathematical Psychics: an Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*, London, C. Kegan Paul.
- Hotelling, H. (1938), *The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway and Utility Rates*, in «Econometrica», pp. 242-269.
- Jaffé, W. (1972), *Pareto Translated: A Review Article*, in «Journal of Economic Literature», pp. 1190-1201.
- Lange, O. (1942), *The Foundations of Welfare Economics*, in «Econometrica», pp. 215-228.
- Montesano, A. (1982), *Il valore naturale. Nota matematica*, in von Wieser, F., *Opere*, Torino, UTET, pp. 41-63.
- Pareto, V. (1894), *Il massimo di utilità dato dalla libera concorrenza*, in «Giornale degli Economisti», luglio, pp. 48-66.
- (1895), *Teoria matematica del commercio internazionale*, in «Giornale degli Economisti», aprile, pp. 476-498.

- (1896 e 1897), *Cours d'économie politique*, 2 voll., Lausanne, F. Rouge.
- (1902), *Di un nuovo errore nello interpretare le teorie dell'economia matematica*, in «Giornale degli Economisti», novembre, pp. 401-433.
- (1906), *Manuale di Economia politica, con una introduzione alla scienza sociale*, Milano, Società editrice Libreria; trad. fr. (1909), *Manuel d'économie politique*, Paris, Giard et Brière (trad. it. dell'Appendice all'ed. del 1909 nella rist. del *Manuale*, Roma, Bizzarri, 1965).
- (1911), *Economie mathématique*, in «Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées», Tomo I, vol. 4, fasc. 4, Paris, Gauthier-Villars, pp. 591-640.
- (1913), *Il massimo di utilità per una collettività in sociologia*, in «Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica», pp. 337-341.
- (1916, 1923²), *Trattato di sociologia generale*, Firenze, Barbera.
- Samuelson, P. A. (1947), *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press.
- Scorza, G. (1903), *A proposito del massimo di ofelimità dato dalla libera concorrenza*, in «Giornale degli Economisti», gennaio, pp. 41-62.