

# Modelli ed evidenza empirica su quel poco che sappiamo dell'apprendimento in mondi che cambiano

di Giovanni Dosi, Giorgio Fagiolo e Luigi Marengo

## 1. Introduzione

In termini molto generali, si può parlare di apprendimento ogni qual volta un agente (economico) ha una comprensione imperfetta del mondo in cui opera, o a causa della mancaza di parte dell'informazione rilevante per le sue decisioni, o a causa di un' imperfetta conoscenza della struttura del mondo, o perché dispone di un repertorio di azioni limitato rispetto a quelle virtualmente accessibili ad un decisore onnisciente, o, infine, perché ha una conoscenza imprecisa e parziale dei propri obiettivi e delle proprie preferenze. L'apprendimento non è altro che il processo dinamico di modificazione di tale conoscenza.

Definito in termini così generali, l'apprendimento è un fenomeno onnipresente nelle decisioni economiche, ma esso assume particolare rilevanza in ambienti evolutivi [cfr. Nelson e Winter 1982; Dosi e Nelson 1994; Nelson 1995; Coriat e Dosi 1995] caratterizzati da (1) agenti eterogenei; (2) razionalità limitata; (3) non stazionarietà dell'ambiente, con costante apparizione di novità, dovuta sia a shocks esogeni sia ad innovazioni introdotte dagli agenti stessi; (4) mercati ed altre istituzioni che operano come meccanismi di selezione; (5) regolarità a livello aggregato che rappresentano proprietà emergenti dell'interazione (in genere lontana dall'equilibrio) tra gli agenti stessi. La combinazione di queste cinque caratteristiche fa sì che di norma gli agenti abbiano una conoscenza solamente parziale della struttura del mondo in cui operano e quindi non siano in grado di elencare in modo esauritivo tutti i possibili stati del mondo (e tanto meno attribuire loro delle probabilità).

*La ricerca presentata in questo lavoro ha beneficiato dei contributi dell'International Institute of Applied System Analysis (IIASA), Laxenburg, Austria; del Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR) e del Ministero dell'Università e Ricerca Scientifica («MURST, Progetti 40%»). Siamo grati a Daniel Friedman, Luigi Orsenigo, Yuri Kaniowski, ai partecipanti alla Sesta Conferenza della Schumpeter Society (Stoccolma, 2-5 giugno) ed ai cicli di lezioni tenuti da uno di noi alla Scuola Estiva di Economia Matematica dell'Università di Gerusalemme, allo SPRU, Università del Sussex ed all'Università di Parigi I.*

00

Come argomentiamo in un altro lavoro dal quale il presente saggio deriva [cfr. Dosi, Marengo e Fagiolo 1996], in tali circostanze una teoria positiva dell'agire economico deve rendere conto della possibilità di errori sistematici, bias, dissonanze cognitive e procedure decisionali persistentemente subottimali (sia da parte degli individui che delle organizzazioni). A questo proposito, l'evidenza empirica derivante da psicologia cognitiva, psicologia sociale, ecc., è estremamente robusta. Telegraficamente (la letteratura su questi punti è discussa in Dosi, Marengo e Fagiolo [1996]):

(1) un aspetto fondamentale dei processi di apprendimento concerne la dinamica di categorie e modelli mentali, irriducibile ad una qualsiasi procedura di aggiornamento di parametri all'interno di un modello precostituito ed anche ad una modificazione di pesi o probabilità attribuiti a modelli alternativi dati ex ante;

(2) valutazioni, decisioni ed apprendimento sono spesso basati su criteri euristici, irriducibili a qualche regola «razionale»;

(3) modelli mentali ed euristiche sono fortemente dipendenti dal contesto: pertanto identiche informazioni ambientali in contesti percepiti come qualitativamente diversi attivano differenti categorizzazioni e menu comportamentali;

(4) le preferenze, e pertanto anche i criteri di valutazione degli schemi di azione, sono spesso endogene, ed inoltre sistemi contraddittori di preferenze tendono a convivere all'interno dello stesso agente;

(5) le organizzazioni, anziché neutralizzare le proprietà di cui sopra (per una sorta di legge dei grandi numeri), tendono, al contrario, ad amplificarle.

Tutto ciò per quanto riguarda i fondamenti cognitivi e procedurali dell'azione e dell'apprendimento.

Ad un livello per così dire più «fenomenologico», un'ampia letteratura – specialmente nell'ambito dell'economia del progresso tecnico e della teoria delle organizzazioni – ha iniziato ad identificare alcune regolarità nelle procedure di apprendimento collettivo (si vedano ad esempio le analisi sulla natura dei paradigmi tecnologici, routines, apprendimento organizzativo, ecc. <sup>1</sup>).

È possibile modellizzare dinamiche di apprendimento che rendano conto (o che almeno non siano in palese violazione) di tali regola-

<sup>1</sup> Cfr., tra gli altri, Nelson e Winter [1982], Dosi [1988], Freeman [1994], March [1994], Cohen *et al.* [1995], Montgomery [1995]. Pur con le dovute differenze, l'approccio all'apprendimento che seguiamo in questo lavoro ha molto in comune con la visione post-keynesiana (si vedano ad esempio i recenti contributi di Davidson [1996], Katzner [1990], Neal [1996]).

rità empiriche? Quali sono i risultati finora ottenuti? Questo breve saggio è inteso come una sorta di mappa, attraverso diverse classi di modelli, delle varie approssimazioni – peraltro ancora molto rudimentali – a teorie dell'apprendimento in ambienti evolutivi.

## 2. Tassonomie dei processi di apprendimento

Un processo di apprendimento è sostanzialmente una ricerca in un qualche spazio degli stati. Ma allora, quali sono gli elementi contenuti in tale spazio? Quale è la sua dimensionalità? Qual è l'algoritmo impiegato per la ricerca?

Ciascuna di queste domande indica diversi criteri per classificare le tipologie dei processi di apprendimento formalmente rappresentati nella letteratura. In primo luogo si possono individuare quattro possibili classi di oggetti del processo di apprendimento: (1) gli stati del mondo (come nei «giochi contro la natura»); (2) il comportamento degli altri agenti (come nei giochi «strategici»); (3) le procedure per la soluzione dei problemi; (4) le proprie caratteristiche (ad es. in termini di preferenze).

Una classificazione che è parzialmente legata alla precedente riguarda le dimensioni dello spazio in cui l'apprendimento avviene: (1) lo spazio delle rappresentazioni o modelli del mondo; (2) lo spazio dei possibili parametri all'interno di un modello dato; (3) lo spazio delle azioni; (4) lo spazio delle performances realizzate. Nel primo caso l'apprendimento è visto come ricerca di una migliore rappresentazione dell'ambiente, mediante una sua modificazione strutturale (e non solamente dei parametri all'interno di una forma strutturale data): tale rappresentazione può essere esplicita (come nei modelli basati su sistemi di regole condizione-azione) o implicita (come, in intelligenza artificiale, nei modelli connessionisti). Si noti che quando si parla di migliore rappresentazione ci si può riferire a due proprietà ben diverse tra loro. Migliore può infatti indicare una rappresentazione che porta ad azioni che ricevono un payoff più elevato: ma ovviamente è possibile che credenze e modelli totalmente errati portino ad azioni più efficaci di credenze e modelli «quasi esatti». Oppure migliore può indicare una migliore capacità del modello di prevedere gli stati del mondo, ma anche in questo caso è possibile che modelli totalmente errati producano delle predizioni «quasi» corrette. Inoltre il modello stesso influenza la percezione della bontà di una predizione: se ad esempio lo stato del mondo cambia da  $s_1$  a  $s_2$ , ma la partizione informativa dell'agente non gli consente di distinguere tra questi due stati,

è probabile che egli sia erroneamente portato a credere nella correttezza di un modello che prevede la stazionarietà dello stato del mondo.

2 L'apprendimento nello spazio dei parametri assume che il modello del mondo sia dato nella sua forma strutturale e rifletta perfettamente la realtà, o quanto meno sia ad essa isomorfo. Un classico esempio è l'apprendimento bayesiano (sul quale torneremo tra breve), dove l'updating delle probabilità a posteriori avviene all'interno di una partizione informativa data ed immutabile.

3 L'apprendimento nello spazio delle azioni invece assume che la rappresentazione sia immutabile oppure che non esista affatto: questo è il caso dei modelli stimolo-reazione e, come vedremo, di gran parte dei modelli di giochi evolutivi.

4 Infine vi sono modelli in cui l'apprendimento è semplicemente ridotto ad una qualche dinamica in uno spazio di indicatori di performances: questi modelli pertanto comprimono il processo di apprendimento in una sorta di «scatola nera» e ne studiano solo gli effetti in termini di risultati. Tipici esempi sono molti modelli di apprendimento tecnologico, dove quest'ultimo è spesso condensato in un processo stocastico nello spazio dei coefficienti di produttività.

Un'ulteriore classificazione considera la dimensionalità dello spazio in cui si svolge la dinamica di apprendimento e le restrizioni che si postulano su di esso. Qui la distinzione più significativa è quella tra  
① ricerca all'interno di un menu fisso di possibilità, tutte accessibili ab origine al decisore; ② dinamiche di apprendimento aperte, in cui la scoperta di opzioni prima ignote è sempre possibile. Si noti che questa tassonomia ha ovvi legami con la precedente: se la ricerca avviene tra un menu fisso e noto di opzioni, l'agente sarà in grado di assegnare, almeno in linea di principio, a tali opzioni delle probabilità ed usare qualche procedura inferenziale (quale la regola di Bayes) per modificare il proprio comportamento. Se invece opzioni prima ignote possono presentarsi (ad esempio perché «costruite» dalla stessa azione degli agenti), lo spazio delle opzioni non può più essere correttamente partizionato e procedure «razionali» (ad esempio bayesiane) possono rivelarsi inapplicabili.

Infine, un'ultima dimensione tassonomica dei processi di apprendimento riguarda i meccanismi che ne guidano la dinamica. Qui possiamo distinguere tra: ① modelli nei quali l'apprendimento avviene esclusivamente a livello di una popolazione di agenti grazie ad un processo di selezione (eventualmente combinato a mutazioni casuali); ② modelli di tipo stimolo-reazione a livello di singolo agente, ma privi di una loro esplicita caratterizzazione cognitiva; ③ modelli basati

TAB. 1. *Tassonomie dei processi di apprendimento: una guida ai modelli*

<i>Oggetto dell'apprendimento</i>	
<i>Azioni/strategie</i>	<i>Rappresentazioni/ «Modelli del mondo»</i>
<p>«menu fissi»</p>	<p>– apprendimento in modelli di teoria dei giochi – giochi evolutivi – apprendimento adattivo in problemi del tipo <i>multi-arm bandit</i> [es. Arthur 1993] – modelli di auto-organizzazione [es. Lesourne 1991] – modelli di «urne» ed altri modelli di innovazione ed adozione [es. Arthur <i>et al.</i> [1984], Arthur e Lane [1993], Kurman [1994], ecc.] – modelli evolutivi di dinamica industriale [es. Winter 1971]</p>
<p>Spazio degli stati e vincoli del processo di apprendimento</p>	<p>– <i>learning-by-doing</i> e <i>learning-by-using</i> nello spazio delle tecnologie (es. Silverberg <i>et al.</i> [1988], Eliasson [1985])</p>
<p>apprendimento con dinamica «aperta»</p>	<p>– apprendimento bayesiano in giochi ad informazione incompleta</p>
<p>preferenze</p>	<p>– preferenze socialmente determinate (es. Kuran [1987], Brock e Durlauf [1995], Akerlof e Dickens [1982])</p>
<p>«dinamica aperta»</p>	<p>– dinamica «aperta» nello spazio delle tecnologie (es. Nelson e Winter [1982], Silverberg e Verspagen [1994], Chiaromonte, Dosi e Orsenigo [1993], Dosi <i>et al.</i> [1995])</p>

su espliciti meccanismi di formazione e modificazione di modelli, aspettative, regole decisionali.

A scopo illustrativo, nella tabella 1 presentiamo alcuni esempi (necessariamente selettivi) di modelli in uno schema derivato dalle tassonomie discusse sopra. Nella sezione che segue suggeriremo gli elementi di base di una struttura formale abbastanza generale da inglobare la maggior parte di tali esercizi tassonomici.

### 3. Un modello di apprendimento e varie specificazioni

Consideriamo un problema standard di decisione in condizioni di incertezza, nel quale possibili stati del mondo sono rappresentati da un insieme numerabile:

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_i, \dots\}$$

In generale il decisore non conosce tale insieme S, ma ne possiede solo una rappresentazione parziale ed imperfetta:

$$\Theta = \{\mathcal{G}'_1, \mathcal{G}'_2, \dots, \mathcal{G}'_j, \dots\} \text{ con } \mathcal{G}'_j \subseteq S \text{ e } \Theta' \subseteq 2^S$$

dove  $\mathcal{G}'_j$  contiene tutti gli stati del mondo che l'agente ritiene possibili (o non può distinguere tra loro) quando uno o più eventi elementari  $s_k \in \mathcal{G}'_j$  si verificano. Gran parte dei modelli economici assume che  $\Theta = S$ , ovvero che l'agente conosce la «vera» struttura del mondo, o almeno postula che  $\Theta$  sia una partizione di S. Tale postulato equivale ad assumere che l'agente detiene un modello del mondo isomorfo al mondo stesso e, in particolare, esclude la possibilità di totale o parziale ignoranza di alcuni stati del mondo e fenomeni di «sorpresa» (quando  $U_i \mathcal{G}'_i \subset S$ , cfr. Shackle [1969]), nonché la possibilità che il modello presenti categorie dai confini non mutuamente escludenti (quando  $\mathcal{G}'_i \cap \mathcal{G}'_j \neq \emptyset$  e  $\mathcal{G}'_i \neq \mathcal{G}'_j$ ) e presenti anche errori sistematici (quando il «vero» stato del mondo non è ritenuto possibile quando esso accade, ma lo è in altre circostanze). Assumendo invece, più in generale, che il modello del mondo non sia necessariamente una partizione del mondo stesso ma sia un qualunque sottoinsieme dell'insieme potenza degli stati del mondo ( $\Theta \subseteq 2^S$ ), questi fenomeni di ignoranza, incoerenza ed incertezza sostanziale possono essere rappresentati. È nostro convincimento che in effetti l'aspetto fondamentale dell'apprendimento sia essenzialmente proprio la ricerca di rappresentazioni del mondo che riducano l'inevitabile margine di ignoranza, errore ed incoerenza insito in ogni rappresentazione umana del mondo.

Assumiamo poi che l'agente abbia potenzialmente a sua disposizione un insieme numerabile di possibili azioni elementari:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_j, \dots\}$$

ma che in ogni istante egli «conosca» e consideri disponibili solo un repertorio di azioni che sono costruzioni, soggette a modificazioni, a partire da sottoinsiemi dell'insieme  $A$ . Chiamiamo tale insieme di repertori di azioni:

$$\mathcal{E}' = \{\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_j, \dots\} \text{ dove } \xi'_j \subseteq A \text{ e } \mathcal{E}' \subseteq 2^A$$

Occorre notare che  $\Theta$  e  $\mathcal{E}$  implicano una struttura che individua le rappresentazioni cognitive ed i repertori comportamentali «ammisibili». Modelli di apprendimento e di *problem-solving* realmente costruttivi dovrebbero partire dal processo di formazione delle grammatiche ad essi associate e considerare gli stessi elementi  $\mathcal{G}_i$  e  $\xi_i$  come risultato di un processo di ricerca in uno spazio delle possibili grammatiche (si veda Fontana e Buss [1996] per un suggestivo tentativo in questa direzione).

L'insieme delle storie soggettive al tempo  $t$  contiene successioni finite di stati soggettivi (percepiti) del mondo e di azioni «percepite» fino al tempo  $t$ :

$$H^t = \{h'_k\}, k = 1, 2, \dots, t$$

in cui  $h'_k \in \Theta^k \times \Theta^{k+1} \dots \times \Theta^t \times \mathcal{E}^k \times \mathcal{E}^{k+1} \dots \times \mathcal{E}^t$ .

Nell'ambito di questo formalismo, una interpretazione o modello mentale può essere rappresentato da un algoritmo che attribuisce delle relazioni causali all'insieme di storie soggettive:

$$\Phi^t = \{\phi^t(h), h \in H\}$$

Una regola decisionale è una mappa dall'insieme delle interpretazioni all'insieme dei repertori d'azione:

$$r'_i: \Phi^t \rightarrow \mathcal{E}'$$

Le capacità decisionali di un agente possono perciò essere rappresentate da un insieme (finito) di regole decisionali:

$$R^t = \{r'_1, r'_2, \dots, r'_q\}$$

Quando l'agente effettua un'azione, la combinazione tra questa e l'attuale stato del mondo determina un esito, sia  $P$  l'insieme degli esiti possibili:

$$p : S \times A \rightarrow P$$

ma, in generale, l'agente dispone solo di una rappresentazione imprecisa e parziale di questi esiti. Inoltre il criterio secondo il quale questi esiti vengono valutati – cioè le preferenze – può mutare ed essere esso stesso oggetto di apprendimento. Chiamiamo *payoff* il valore di tali esiti in termini di un criterio di «desiderabilità» (sia esso la nozione usuale di utilità, o un qualunque altro criterio):

$$U' = \Psi' (p')$$

La funzione di *payoff* è quindi data da:

$$\pi' : \Theta' \times \Xi' \rightarrow U'$$

In base a questo modello molto generale, è possibile classificare i possibili processi di apprendimento in base agli elementi del modello che ne sono interessati:

- (1) apprendimento nello spazio delle rappresentazioni del mondo: comporta una modificazione della rappresentazione  $\Theta'$ . Ovviamente il tipo e la modalità di apprendimento sono legati in questo caso alla relazione che intercorre tra l'ambiente e il decisore; in particolare possiamo distinguere tra: a) interazioni con l'ambiente senza *feedback*, b) interazioni con l'ambiente con *feedback*, c) interazione tra agenti (possibilmente influenzati dallo «stato di natura»);
- (2) apprendimento nello spazio dei repertori d'azione: comporta una modificazione dell'insieme  $\Xi'$ ;
- (3) apprendimento nello spazio delle rappresentazioni della funzione di *payoff*: se l'agente ha una rappresentazione imperfetta di  $S$  e di  $A$ , a fortiori avrà una conoscenza parziale ed imprecisa della funzione di *payoff*. Bisogna peraltro notare che la maggior parte degli algoritmi d'apprendimento consiste nella costruzione di rappresentazioni del mondo e delle azioni in termini di classi di «quasi-equivalenza» rispetto alla funzione di *payoff*. Pertanto tali algoritmi tendono a produrre una conoscenza relativamente più accurata della funzione di *payoff* che dei sottostanti insiemi di stati del mondo ed azioni;
- (4) apprendimento nello spazio delle regole decisionali: come già accennato, un problema fondamentale (e ancora irrisolto) a questo pro-

posito è la definizione dello spazio delle possibili regole decisionali nel quale si effettua la ricerca. Gran parte dei modelli esistenti aggira questo problema assumendo che l'apprendimento sia una semplice selezione della regola più efficace all'interno di un menu fisso e interamente noto di possibili regole.

In quel che segue discuteremo molto brevemente alcuni dei principali modelli di apprendimento attualmente impiegati in economia che, in qualche modo, allentano le ipotesi più restrittive richieste dai modelli di impronta bayesiana. Molti modelli sono «evolutivi», nel senso che considerano esplicitamente qualche forma di dinamica di aggiustamento, sebbene, come sottolineeremo, essi trattano di adattamento via selezione più che di evoluzione in senso proprio.

### 3.1. Modelli di apprendimento stocastico

Questi modelli sono meno esigenti di quelli bayesiani rispetto al grado di conoscenza che si deve postulare che l'agente possieda a priori. Nei cosiddetti giochi evolutivi ad esempio si considera una popolazione di agenti che di fatto non hanno alcuna capacità cognitiva ma sono dei semplici portatori di una e una sola azione<sup>2</sup>; tutta la capacità di apprendimento è a livello di popolazione e consiste in un meccanismo di selezione che determina la diffusione nella popolazione di azioni che ricevono un *payoff* relativamente più elevato.

Nella sua formulazione originaria e tuttora più comune [cfr. Maynard-Smith 1982; Friedman 1991; Kandori, Mailath e Rob 1993; Young 1993; Weibull 1995], il singolo agente ha essenzialmente due ruoli: quello di portatore della memoria del sistema («replicando» le azioni da un periodo all'altro) e quello di portatore di variazioni (tramite mutazioni casuali). Dati  $N$  agenti e  $k$  possibili azioni  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , se indichiamo con  $n_i(t)$  il numero di agenti che adottano l'azione  $a_i$ , si richiede che il meccanismo di selezione sia tale da soddisfare la disuguaglianza:

$$(1) \quad \frac{n_i(t+1) - n_i(t)}{n_i(t)} > \frac{n_j(t+1) - n_j(t)}{n_j(t)}$$

$$\text{se e solo se } \pi^t(a_i, s^t) > \pi^t(a_j, s^t)$$

<sup>2</sup> Coerentemente con il modello generale presentato in precedenza, preferiamo usare il termine azione piuttosto che strategia, come generalmente avviene in questi modelli.

In molti casi tale meccanismo di selezione assume la forma della cosiddetta «dinamica di replicazione» (replicator dynamics) originariamente proposta in base ad argomentazioni biologiche [cfr. Maynard-Smith 1982] ma ampiamente, sebbene in modo non sempre convincente, utilizzato anche in modelli economici<sup>3</sup>:

$$(2) \quad n_i(t+1) = g(\pi^t(a_i, s_i) - \pi^{-t}) n_i(t)$$

dove  $\pi^{-t}$  è il payoff medio della popolazione.

L'apprendimento è il risultato dell'azione combinata di tale meccanismo di selezione e di mutazioni casuali dell'azione di alcuni agenti. Originariamente la mutazione era concepita come fenomeno puntuale ed isolato, introdotto solamente come strumento per l'analisi della stabilità degli equilibri. Modelli più recenti [cfr., ad esempio, Kandori, Mailath e Rob 1993; Foster e Young 1990; Fudenberg e Harris 1992] considerano invece le mutazioni come fenomeno sempre attivo ed hanno quindi introdotto un concetto di equilibrio come distribuzione limite di qualche processo stocastico.

### 3.2. Modelli stocastici con auto-rinforzo

Se nei giochi evolutivi le azioni si diffondono nella popolazione in base ad un qualche confronto tra l'efficacia di ciascuna di esse ed un qualche indicatore statistico della fitness globale della popolazione, in questa nuova classe di modelli la diffusione segue algoritmi più semplici che usano solo informazioni locali, quali ad esempio l'imitazione del comportamento della maggioranza all'interno di un dato campione.

Se si considera una popolazione finita di agenti, il numero  $n_i(t)$  di coloro che scelgono l'azione  $a_i$  segue una catena di Markov, nella quale le probabilità di transizione dipendono dalla frequenza delle azioni nella popolazione. Se ad esempio vi sono solo due possibili azioni, la probabilità di mutazione da un'azione all'altra è data da:

$$(3) \quad P_i^j(a_i \rightarrow a_j) = \alpha \frac{n_j(t)}{N} + \epsilon$$

dove  $\alpha$  è il peso del meccanismo di auto-rinforzo nella selezione e  $\epsilon$  racchiude le componenti che sono indipendenti dalle scelte altrui. Si può dimostrare [cfr. Kirman 1992; 1993; Orléan 1992; Topol 1991]

<sup>3</sup> Lavori più recenti hanno iniziato ad analizzare classi più ampie di dinamiche di selezione [cfr., ad esempio, Kandori, Mailath e Rob 1993; Kaniovski e Young 1994].

che, nel limite, il tempo che il sistema trascorre in ciascuno dei due stati possiede una distribuzione invariante che dipende dai valori di  $\alpha$  e  $\varepsilon$ . Per esempio, se  $\alpha$  è grande relativamente a  $\varepsilon$ , la popolazione può oscillare tra i due stati a causa dell'elevata componente imitativa.

Una diversa classe di modelli considera invece una popolazione che cresce indefinitamente: ad ogni istante  $t$  un nuovo agente effettua una scelta irreversibile in base alle frequenze relative nella popolazione di coloro che già hanno compiuto la propria scelta. In questi modelli [cfr., ad esempio, Arthur, Ermoliev e Kaniovski 1984; Dosi e Kaniovski 1994] la dinamica della popolazione è descritta da un'equazione del tipo:

$$(4) \quad x_k(t+1) = x_k(t) + \frac{1}{N_t} \{ [f_k(x_k(t+1)) - x_k(t)] + \varepsilon(x(t), t) \}$$

dove  $N_t$  è la dimensione della popolazione al tempo  $t$  e  $x_k(t)$  ne è la proporzione di coloro che hanno scelto l'azione  $a_k$  e  $\varepsilon$  è un termine stocastico indipendente in  $t$  con media nulla.

La funzione  $f_k$  incorpora i meccanismi di auto-rinforzo e la sua forma funzionale determina il numero e le proprietà asintotiche dei punti fissi. Nel caso di equilibri multipli il processo è di norma non ergodico (cioè presenta una dipendenza dal cammino) e la selezione di un equilibrio dipende dalle condizioni iniziali e da una sequenza finita di scelte iniziali [cfr. Arthur, Ermoliev e Kaniovski 1984; Dosi, Ermoliev e Kaniovski 1994].

Una questione teorica più fondamentale riguarda, per così dire, la relazione tra il peso della storia passata e la capacità degli agenti di estrarre l'informazione da essa. Questo è il tema affrontato da Arthur e Lane [1993], i quali considerano un modello di scelta tra due tecnologie A e B. Gli stati del mondo  $S = \{s_A, s_B\}$  rappresentano le caratteristiche di tali tecnologie e sono sconosciuti agli agenti, i quali possiedono solo distribuzioni di probabilità a priori  $N(\mu_A, \sigma_A)$  e  $N(\mu_B, \sigma_B)$ . Ad ogni istante  $t$  un agente sceglie una tecnologia massimizzando l'utilità attesa con avversione al rischio costante. Quando un agente effettua una scelta, egli osserva un campione di agenti che hanno già adottato una delle due tecnologie; ed utilizzando la regola di Bayes egli può calcolare la distribuzione a posteriori e dunque scegliere la tecnologia con la più alta utilità attesa. Arthur e Lane dimostrano che questo comportamento razionale per l'individuo può portare il sistema a fissarsi irreversibilmente sull'opzione inferiore; inoltre Lane e Vescovini [1996] mostrano che regole meno «razionali» possono invece rivelarsi dinamicamente più efficienti per la collettività.

### 3.3. Apprendimento a livello di popolazione o a livello individuale<sup>4</sup>

Se nella loro versione tradizionale i giochi evolutivi non dotano gli individui di alcuna capacità cognitiva e di apprendimento, alcuni modelli più recenti [cfr. Young 1993] consentono di analizzare la dinamica di una popolazione formata da individui dotati di qualche capacità cognitiva, quale la memoria degli eventi passati e qualche semplice algoritmo decisionale.

Queste estensioni consentono anche di considerare tali modelli non già come modelli di apprendimento a livello di popolazione, ma di apprendimento individuale. È infatti sufficiente considerare l'insieme delle regole decisionali non già come una popolazione di individui distinti, ma come modello di un singolo individuo che aggiusta adattivamente il proprio comportamento rafforzando patterns di comportamento che si rivelano relativamente più efficaci.

Supponiamo che il nostro agente debba scegliere tra un menu fisso e finito di azioni  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , che ignori la realizzazione dello stato del mondo  $s^t$  ed osservi solamente il payoff  $\pi^t$ .

Un processo di apprendimento adattivo richiede che l'agente scelga l'azione in base al suo peso (normalmente chiamato «forza») che fundamentalmente misura quanto l'azione è stata efficace nel passato. Chiamando  $(F_k^t)$  la forza dell'azione  $a_k$  al tempo  $t$ , essa viene aggiornata in base ad una regola ricorsiva del tipo:

$$(5) \quad F_k^{t+1} = F_k^t \frac{f^k(\pi^t(s^t, a_k))}{\sum_i f^i(\pi^t(s^t, a_i))}$$

e le azioni vengono dunque selezionate secondo un'estrazione casuale con probabilità:

$$(6) \quad P^t(a_k) = \frac{F_k^t}{\sum_i F_i^t}$$

Processi stocastici che originano da questo tipo di meccanismo di selezione sono stati studiati da Arthur [1993], Easley e Rustichini

<sup>4</sup> Per mancanza di spazio non possiamo qui trattare dei modelli ad apprendimento locale, per i quali rimandiamo alla già citata versione estesa di questo lavoro ed a Fagiolo [1996].

[1995], Fudenberg e Levine [1995]. Il modello di Easley e Rustichini, in modo particolare, rappresenta un interessante anello di congiunzione tra modelli di apprendimento collettivo ed individuale mediante argomenti evolutivi. Essi considerano un decisore che affronta un ambiente rappresentato da una variabile stocastica generata da un processo ignoto. Invece di procedere secondo i dettami bayesiani, l'agente opera selezionando in modo adattivo regole decisionali del tipo di quelle esposte nel modello generale di cui sopra, mediante un processo di selezione casuale del tipo (6) tra regole la cui forza è aggiornata in base alla (5). In questo modo la forza della regola  $r$ , segue un processo stocastico dato da:

$$(7) \quad F_k^{t+1} = \prod_{z=0}^t F_k^z \frac{f^k(\pi^z(s^t, a_k^t))}{\sum_i f^i(\pi^z(s^t, a_k^t))}$$

Introducendo ipotesi aggiuntive di stazionarietà ed ergodicità del processo stocastico che regola lo stato del mondo, e assumendo la monotonicità, simmetria ed indipendenza della dinamica di selezione, Easley e Rustichini dimostrano che un agente che segua questo processo di selezione adattiva convergerà ad un comportamento indistinguibile da quello di un massimizzatore dell'utilità (oggettiva) attesa, ed inoltre che le regole che egli selezionerà saranno le stesse selezionate al limite da una semplice «dinamica di replicazione».

Si tratta evidentemente di due risultati di grande interesse, ma occorre sottolineare che si tratta di un modello di pura selezione nel quale, affinché un comportamento *de facto* ottimizzante possa venire selezionato, è necessario che esso esista nella «dotazione iniziale di comportamenti possibili» del decisore. In altre parole, occorre che l'agente possieda regole decisionali che comportano azioni ottimizzanti nell'ambiente, sebbene l'agente non sia cosciente della loro ottimalità ed esse siano «confuse» tra molte altre regole sub-ottimali.

Inoltre in questo ed in simili modelli si suppone che ad ogni stadio del processo di apprendimento la forza di tutte le regole sia aggiornata in base al *payoff* che ciascuna di esse avrebbe ricevuto in corrispondenza dello stato del mondo verificatosi. Chiaramente questa assunzione ha senso solo se le azioni non determinano alcun *feedback* sull'ambiente: nel caso contrario solo la forza delle regole effettivamente utilizzate può essere valutata, e fenomeni di non ergodicità e *lock-in* possono verosimilmente verificarsi e dilemmi del tipo *multi-armed-bandit* risultano inevitabili.

In altre parole, in ambienti evolutivi la dinamica stessa del proces-

so di apprendimento determina le caratteristiche dell'ambiente che si vuole apprendere.

### 3.4. Agenti Artificiali Adattivi

Se si abbandona l'assunzione che gli agenti siano dotati naturalmente della corretta rappresentazione dell'ambiente in cui operano (anche se confusa dalla presenza di rappresentazioni concorrenti «errate») e si vuole invece porre al centro dell'analisi la formazione, memorizzazione e modificazione di rappresentazioni inevitabilmente imperfette, parziali ed imprecise, (ma) tuttavia utili per operare in modo efficace in ambienti largamente ignoti, da un lato, come già detto, diventa inevitabile la necessità di qualche forma di fondamento psicologico e cognitivo dell'analisi del processo decisionale, dall'altro lato si apre l'opportunità dell'applicazione di modelli di apprendimento sviluppati nell'ambito dell'Intelligenza Artificiale e discipline limitrofe, ed in particolare di quei modelli d'apprendimento che considerano l'azione congiunta di processi di selezione e mutazione come il meccanismo fondamentale che guida l'apprendimento. Questo tipo di preoccupazione è alla base di gran parte dei modelli di «Agenti Artificiali Adattivi» (AAA) (d'ora in poi).

I modelli AAA (per un'introduzione generale all'uso di tali modelli in economia si vedano, ad esempio, Arthur [1993], Lane [1993a; 1993b]) possiedono almeno due caratteristiche fondamentali: non sono semplici modelli di selezione, ma considerano la sperimentazione di nuove alternative una caratteristica fondamentale e sempre presente nel sistema. In secondo luogo tali modelli considerano l'eterogeneità e la complessità dell'interazione tra elementi (siano essi agenti in modelli di interazione collettiva, o regole decisionali in modelli di decisione individuale) come due aspetti essenziali nel determinare la dinamica del sistema. Si può dire che in tali modelli l'eterogeneità è la norma e l'omogeneità è l'eccezione che emerge solo sotto condizioni ben determinate. Queste due caratteristiche rendono i modelli AAA dei modelli «a dinamica aperta», in cui gli equilibri tendono ad essere degli stadi di temporanea stabilità «ecologica» nei quali piccole variazioni possono sempre scatenare effetti «a valanga» con meccanismi non lineari e autorinforzanti.

Un interessante prototipo di modello AAA si trova in Lindgren [1991]: in questo lavoro un classico dilemma del prigioniero è giocato ripetutamente da una popolazione di agenti-artificiali. Ogni agente è caratterizzato da una regola decisionale che mappa deterministica-

mente una storia, finita ma di lunghezza variabile, del gioco (cioè una sequenza finita di Cooperazioni o Defezioni del giocatore stesso e dell'avversario) in un'azione (Cooperare o Defezionare). La popolazione interagisce e adatta il proprio comportamento in base a una versione generalizzata di un Algoritmo Genetico [cfr. Goldberg 1989], in cui si ammettono genomi di lunghezza variabile. Il semplice fatto di ammettere strategie che considerano storie del gioco di lunghezza variabile rende il numero delle possibili strategie infinito e lo spazio in cui la ricerca si svolge assume una dimensione infinita. Pertanto l'evoluzione non è più una dinamica di selezione entro uno spazio dato ed immutabile, ma «può essere considerata come un fenomeno transitorio in un sistema dinamico a dimensionalità potenzialmente infinita. Se le transizioni continuano all'infinito, abbiamo quella che si può definire *evoluzione in uno spazio illimitato (open-ended evolution)*» [Lindgren 1991, 296, nostra traduzione].

La stessa dimensione e complessità delle strategie diventano un fattore sottoposto a selezione e mutamento, determinando così una generalizzazione ed arricchimento del concetto di strategia implicito in gran parte della teoria dei giochi evolutivi: mentre in questi ultimi la strategia è ridotta ad un'azione (all'interno di un insieme dato) soggetta a selezione, nei modelli AAA essa contiene come parte essenziale (anch'essa soggetta a selezione e mutamento) una rappresentazione dell'ambiente.

Questa distinzione è ancor più evidente in modelli AAA che esplicitamente considerano l'apprendimento come ricerca in spazi di regole condizione-azione. Questi modelli, eccetto in ambienti stazionari e bassa dimensionalità, tipicamente non generano nel processo di apprendimento una singola regola decisionale, bensì un sistema di regole (una sorta di «ecologia» di processi computazionali [cfr. Huberman e Hogg 1995]) che nelle loro interrelazioni formano una rappresentazione «distribuita» del problema. I *patterns* di comportamento generati da tali modelli sono quindi, di norma, molto più ricchi di quelli generati da modelli di pura selezione.

Un tipico esempio di tali modelli sono i cosiddetti *Classifiers Systems* [cfr. Holland *et al.* 1986 per il modello di base; Arthur 1993 e Lane 1993b per una visione generale sull'applicabilità all'economia; Marimon, McGrattan e Sargent 1990, Marengo 1996, Marengo e Tordjman 1996 per alcune specifiche applicazioni economiche].

I *Classifiers Systems* sono sistemi di regole condizione-azione che classificano le informazioni provenienti dall'ambiente in classi (categorie se le informazioni sono qualitative, insiemi di intervalli sull'asse reale, se le informazioni sono numeriche) equivalenti dal punto di vi-

sta dell'azione. L'apprendimento avviene tramite un processo di selezione, analogo a quello contenuto nel modello di Easley e Rustichini, ed un processo di creazione di nuove regole mediante mutazione e ricombinazione delle regole che si sono dimostrate più efficaci (tramite l'applicazione di «algoritmi genetici»). Uno degli aspetti più notevoli dei *Classifiers Systems* è che il numero di regole è normalmente «piccolo» rispetto alla complessità del problema affrontato, e quindi non è possibile generare una risposta ottima per ogni singolo segnale, ma il sistema è tuttavia in grado di creare endogenamente delle «gerarchie di default», cioè dei sistemi gerarchici tra regole che vanno da regole molto specifiche che rispondono a segnali osservati con alta frequenza, a regole sempre più generali, che rispondono in modo subottimale ma «robusto» a segnali più rari o del tutto inattesi. Inoltre l'applicazione degli algoritmi genetici garantisce una costante introduzione di nuove regole (e quindi anche la possibilità di reagire a cambiamenti ambientali), per cui l'esplorazione di nuove alternative non si annulla mai del tutto.

Marengo [1996] applica questa metodologia all'analisi dell'apprendimento organizzativo e mostra che diversi tipi di ambiente possono dar vita a diverse forme di distribuzione della conoscenza all'interno dell'organizzazione, ed in particolare favorire sistemi con un maggiore o minor grado di eterogeneità nella distribuzione delle conoscenze. Palmer *et al.* [1996], Vriend [1995] e Marengo e Tordjman [1996] considerano invece dei mercati artificiali in cui operano agenti eterogenei rappresentati da sistemi di regole condizione-azione e mostrano che tale eterogeneità può persistere e generare una dinamica dei prezzi che ha molte proprietà statistiche in comune con quelle osservate in mercati reali.

Una metodologia simile, il cosiddetto *Genetic Programming* [Koza 1993], considera non già una ricerca nello spazio delle possibili classificazioni (tramite codifiche binarie) dei segnali ambientali, bensì una ricerca nello spazio delle possibili funzioni, che possono essere costruite partendo da un insieme di variabili e di operatori (aritmetici, logici, ecc.) primitivi. Dosi, Marengo, Bassanini e Valente [1994] presentano un'applicazione di questa metodologia allo studio dell'emergere di *routines* di fissazione del prezzo (*mark-up*, imitazione del leader, ecc.) in un mercato oligopolistico.

Più in generale questi modelli fanno parte di una nascente famiglia di modelli di «Economie Artificiali» (analogamente alla cosiddetta «Vita Artificiale», cfr. Langton [1989]), nei quali l'analisi non è più basata sul concetto di equilibrio e su condizioni di convergenza e stabilità, ma sulle cosiddette proprietà emergenti, ovvero regolarità a li-

vello aggregato relativamente robuste e persistenti [cfr. Lane 1993a; 1993b; Axtell e Epstein 1994].

### 3.5. Apprendimento nello spazio dei risultati

Se gli ultimi modelli esaminati si propongono, in varia misura e seguendo strade diverse, di aprire in qualche modo il *black box* del processo cognitivo, un'altra famiglia di modelli evita del tutto questa scomposizione e condensa l'intero processo cognitivo in una dinamica nello spazio dei risultati delle decisioni degli agenti<sup>3</sup>.

Questa prospettiva si trova in psicologia in modelli di apprendimento stimolo-reazione basati sul cosiddetto *reinforcement learning* [cfr. Estes 1950; Bush e Mosteller 1955; Suppes 1995]. Una diversa impostazione si ritrova nei modelli economici di apprendimento tecnologico, dove l'apprendimento è rappresentato da una dinamica nello spazio di un qualche coefficiente tecnologico. Un modello prototipico in quest'ambito è il modello di *learning-by-doing* in Arrow [1962], corroborato da un'ampia evidenza empirica sulla diminuzione dei costi (o aumento della produttività) al crescere della produzione cumulata.

In Silverberg, Dosi e Orsenigo [1988] invece si esamina come le imprese apprendono ad utilizzare in modo efficiente una nuova tecnologia incorporata in beni capitali, in funzione di *skills* specifiche dell'impresa e della produzione attuale e cumulata.

Analogamente, numerosi modelli evolutivi, sulla scia di Nelson e Winter [1982], rappresentano l'apprendimento tecnologico come un processo stocastico nello spazio delle tecniche, delle cui caratteristiche le imprese hanno una conoscenza parziale e in cui la probabilità e le direzioni delle future scoperte dipendono dalla conoscenza accumulata nel passato [cfr. Silverberg e Lenhart 1994; Chiaromonte e Dosi 1993; Chiaromonte *et al.* 1993; Dosi *et al.* 1995; Kwasnicki 1996]. In altri modelli [cfr. Nelson e Winter 1982; Conlisk 1989] si assume una «deriva» (*drift*) esogena nelle opportunità di apprendimento (come metafora del progresso scientifico).

Infine alcuni modelli considerano l'*imitazione*, cioè un processo stocastico di accesso alla migliore tecnologia utilizzata o ad una combinazione tra la tecnologia migliore e quella attuale, come motore fon-

<sup>3</sup> Alcuni modelli si pongono come una sorta di «forma ridotta» dei sottostanti fenomeni cognitivi.

damentale del processo di apprendimento [cfr., ad esempio, Nelson e Winter 1982; Chiaromonte *et al.* 1993; Silverberg e Verspagen 1994; 1995; Kwasnicki 1996].

Si noti che lo spirito di questi modelli è essenzialmente «fenomenologico»: essi cercano di riprodurre regolarità empiriche e «fatti stilizzati» collocandosi ad un livello di descrizione molto più elevato rispetto ai modelli cognitivi precedenti. Per essi è dunque essenziale soddisfare criteri di robustezza empirica della dinamica di apprendimento utilizzata: ad esempio, quale criterio empirico giustifica il ricorso ad una distribuzione di Poisson per simulare l'arrivo di nuove tecniche? Quale tipo di specificazione si deve utilizzare per il processo di Markov che regola la dinamica di apprendimento?

Questa necessità di robustezza empirica dei fondamenti è tanto più urgente quanto più l'interesse di questi modelli risiede non tanto nella loro proprietà asintotiche ma nel loro comportamento in un tempo finito. Pertanto la compatibilità di queste «forme ridotte» rispetto alle descrizioni di livello più basso del processo cognitivo di *problem solving* e apprendimento è una questione cruciale che deve essere perseguita.

#### 4. Conclusione: questioni ancora aperte

Questo breve saggio ha cercato di fornire un quadro sintetico di alcuni modelli di apprendimento in economia. Vi sono ancora alcuni nodi teorici che, a nostro parere, restano essenzialmente irrisolti nell'ambito della letteratura esistente. Tra essi ci sembra che i seguenti necessitino di particolare attenzione.

##### 4.1. Apprendimento e selezione

Apprendimento e selezione sono, nella teoria evolutiva, i due meccanismi fondamentali che determinano la dinamica di un sistema economico. Mentre la gran parte dei modelli esistenti sono o modelli di «puro apprendimento» (come nella teoria dei giochi) o modelli di «pura selezione» (come nelle versioni standard della teoria dei giochi evolutivi), è nostra convinzione che quasi tutti i fenomeni economici sono il risultato dell'interazione tra questi due meccanismi. Selezione ed apprendimento possono operare in direzioni diverse: ad esempio una debole selezione può consentire la persistenza di comportamenti inefficienti, ma anche consentire maggiore esplorazione di nuove al-

ternative e maggiore apprendimento da *trial-and-error* (cfr. il cosiddetto dilemma *exploitation vs. exploration*, March [1991]). Si noti che questo dilemma ha anche una dimensione temporale spesso dimenticata dalle teorie esistenti: selezione ed apprendimento possono agire su scale temporali diverse ed una pressione selettiva molto severa può consentire maggiore apprendimento se essa agisce solamente in istanti di tempo sufficientemente lontani. D'altra parte i mercati non sono semplici meccanismi di selezione, ma forniscono anche agli agenti quel feedback ai loro comportamenti che contribuisce a determinare la direzione dell'apprendimento individuale.

Un'altra questione, strettamente legata alla precedente, riguarda i complessi legami tra apprendimento individuale e collettivo: è possibile che errori e *bias* individuali producano situazioni collettivamente più desiderabili [cfr. ad esempio, Lane e Vescovini 1996; Dosi e Lovallo 1995].

#### 4.2. Apprendimento, dipendenza dal cammino e co-evoluzione

Come già accennato, una caratteristica generale dell'apprendimento è la sua «dipendenza dal cammino», in quanto tipicamente nuove conoscenze sono costruite su quelle già esistenti. Una questione più complessa riguarda però la dipendenza dal cammino che deriva dalla correlazione e complementarità tra le singole componenti di un repertorio di «tratti» cognitivi e comportamentali. Questo fenomeno è conosciuto in biologia col nome di «correlazione epistatica» (cfr. il cosiddetto «modello NK» in Kauffman [1993]; si veda anche Levinthal [1996] per una preliminare applicazione all'apprendimento organizzativo). Si consideri nuovamente il nostro modello generale: tipicamente il processo di apprendimento darà luogo ad un sistema di regole comportamentali, rappresentazioni, preferenze tra loro strettamente interrelate. Tipicamente una regola comportamentale non sarà «buona» o «cattiva» in assoluto, ma sarà tale solo in un determinato contesto formato da altre regole, rappresentazioni e preferenze ed il processo di apprendimento sarà un processo di co-evoluzione ed adattamento reciproco tra questi «tratti». Kauffman [1993] mostra che al crescere del grado di interrelazione tra questi tratti diventa sempre più difficile seguire un sentiero di apprendimento «graduato», in cui i singoli tratti vengono modificati ad uno ad uno: è infatti sempre più probabile che un «miglioramento» di un singolo tratto, disgiunto da opportune modifiche di altri tratti, porti ad un «peggioramento» del risultato complessivo del sistema.

### 4.3. Preferenze e aspettative

Se, come abbiamo visto, alcuni passi nella direzione di modelli in cui si analizza la co-evoluzione di rappresentazioni ed azioni si intravedono nella letteratura più recente, la questione invece di come questi co-evolvano con aspettative e preferenze è ancora del tutto trascurata. Per quanto riguarda le aspettative, la teoria oggi fornisce due alternative entrambe insoddisfacenti: da un lato il paradigma delle aspettative razionali assume che gli agenti di fatto conoscano già ciò che devono apprendere, dall'altro lato si propongono vari meccanismi estrapolativi *ad hoc* di formazione delle aspettative. Ben poco invece si è in grado di dire su come gli agenti formano congetture sulla struttura del mondo e le sottopongono a verifica in base alla loro esperienza.

Analogamente, qualche progresso è stato fatto verso modelli in cui le preferenze sono influenzate dall'interazione sociale [cfr., ad esempio, Kuran 1987; Brock e Durlauf 1995], ma siamo ancora lontani da modelli nei quali rappresentazioni, azioni e *payoff* sono valutati sia in base a criteri almeno in parte determinati dall'interazione sociale, sia in base al desiderio di modificare le preferenze in base ai risultati ottenuti, piuttosto che il contrario.

#### Riferimenti bibliografici

- Akerlof, G.A. e Dickens, W.T. (1982), *The Economic Consequences of cognitive dissonance*, in «American Economic Review», vol. 72.
- Andersen, E.S. (1994), *Evolutionary Economics. Post Schumpeterian Contribution*, London, Francis Pinter e New York, St. Martin's Press.
- Arifovic, J. (1994), *Genetic Algorithm Learning and the Cobweb Model*, in «Journal of Economic Dynamics and Control», vol. 18.
- Arrow, K. (1962), *Economic welfare and allocation of resources for invention*, in N. Rosenberg (a cura di), *The Economics of Technological Change*, Harmondsworth, Penguin.
- Arthur, B.W. (1993), *On designing artificial agents that behave like human agents*, in «Journal of Evolutionary Economics», vol. 3, pp. 1-22.
- Arthur, B.W., Ermoliev, Yu. e Kaniovski, Yu. (1984), *Strong laws for a class of path-dependent stochastic processes with applications*, in S. Argin e P. Shiryayev (a cura di), *Proceedings Conference on Stochastic Optimization*, Berlin, Springer Verlag, Lecture Notes in Control and Information Sciences.
- Arthur, B.W. e Lane, D. (1993), *Information Contagion*, in «Structural Change and Economic Dynamics», vol. 4.
- Axtell, R. e Epstein, J. (1994), *Modelling artificial economies of adaptive agents*, Laxenburg, Austria, IIASA Colloquium on Evolutionary Economics.

- Brock, W. e Durlauf, S. (1995), *Discrete Choices with Social Interactions. I: Theory*, Santa Fé, Santa Fé Institute, Working Paper 95-10-084.
- Bush, R.R. e Mosteller, F. (1955), *Stochastic Models for Learning*, New York, Wiley.
- Chiaromonte, F. e Dosi, G. (1993), *Heterogeneity, competition and macroeconomic dynamics*, in «Structural Change and Economic Dynamics», vol. 4.
- Chiaromonte, F., Dosi, G. e Orsenigo, L. (1993), *Innovative learning and institutions in the process of development: on the microfoundations of growth regimes*, in R. Thomson (a cura di), *Learning and Technological Change*, London, Macmillan.
- Cohen, M., Burkhart, R., Dosi, G., Egidi, M., Marengo, L., Warglien, M., Winter, S. e Coriat, B. (1995), *Routines and other recurring action patterns of organisations: Contemporary Research Issues*, Santa Fé, Santa Fé Institute, Working Paper, in corso di stampa in «Industrial and Corporate Change».
- Conlisk, J. (1989), *An aggregate model of technical change*, in «Quarterly Journal of Economics», vol. 104.
- Coriat, B. e Dosi, G. (1995), *The institutional embeddedness of economic change. An appraisal of the «Evolutionary» and «Regulationist» Research Programmes*, Laxenburg, Austria, IIASA Working Paper 95-117.
- Davidson, P. (1996), *Reality and economic theory*, in «Journal of Post-Keynesian Economics», vol. 18.
- Dosi, G. (1988), *Sources, procedures and microeconomic effects of innovation*, in «Journal of Economic Literature».
- Dosi, G., Ermoliev, Yu. e Kaniovski, Yu. (1994), *Generalized urn schemes and technological dynamics*, in «Journal of Mathematical Economics», vol. 23.
- Dosi, G., Freeman, C., Nelson, R. Silverberg, G. e Soete, L. (a cura di) (1988), *Technical Change and economic Theory*, London, F. Pinter e New York, Columbia University Press.
- Dosi, G. e Kaniovski, Yu. (1994), *On «badly behaved» dynamics*, in «Journal of Evolutionary Economics», vol. 4.
- Dosi, G. e Lovallo, D. (1995), *Rational Entrepreneurs or Optimistic Martyrs? Some Considerations on Technological Regimes, Corporate Entries and the Evolutionary Role of Decision Biases*, Laxenburg, Austria, IIASA Working Paper 95-77, in R. Garud, P. Nayyar e Z. Shapira (a cura di), *Technological Foresights and Oversights*, Cambridge, Cambridge University Press, 1996.
- Dosi, G. e Malerba, F. (1996), *Organization and Strategy in the Evolution of the Enterprise*, London, Macmillan.
- Dosi, G., Marengo, L., Bassanini, A. e Valente, M. (1994), *Norms as emergent properties of adaptive learning. The case of economic routines*, Laxenburg, Austria, IIASA Working Paper 94-73.
- Dosi, G., Marengo, L. e Fagiolo, G. (1996), *Learning in Evolutionary Environments*, Laxenburg, Austria, IIASA Working Paper.
- Dosi, G., Marsili, O., Orsenigo, L. e Salvatore, R. (1995), *Learning, market*

- selection and the evolution of industrial structure*, in «Small Business Economics».
- Dosi, G. e Nelson R. (1994), *An introduction to evolutionary theories in economics*, in «Journal of Evolutionary Economics», vol. 4.
- Easley, D. e Rustichini, A. (1995), *Choice without beliefs*, CORE, Catholic University of Louvain, Louvain-la-Neuve, Working Paper.
- Eliasson, G. (1985), *The firm and financial markets in the Swedish micro-to-macro model*, Stockholm, IUI Working Paper.
- Estes, W.K. (1950), *Toward a statistical theory of learning*, in «Psychological Review», vol. 57.
- Fagiolo, G. (1996), *Modelli di Interazione Spaziale in Economie Dinamiche Decentralizzate: una Rassegna*, Discussion Paper n. 29, Nuova Serie, Dipartimento di Scienze Economiche, Università di Roma «La Sapienza».
- Fontana, W. e Buss, L. (1996), *The barrier of Objects: from Dynamical Systems to Bounded Organizations*, Laxenburg, Austria, IIASA Working Paper 96-27.
- Foster, D. e Young, P.H. (1990), *Stochastic evolutionary game dynamics*, in «Theoretical Population Biology», vol. 38.
- Freeman, Ch. (1994), *The Economics of Industrial Innovation*, London, Pinter, seconda edizione.
- Friedman, D. (1991), *Evolutionary games in economics*, in «Econometrica», vol. 59.
- Fudenberg, D. e Harris, C. (1992), *Evolutionary dynamics with aggregate shocks*, in «Journal of Economic Theory», vol. 57.
- Fudenberg, D. e Levine, D.K. (1995), *Consistency and Cautious Fictitious Play*, in «Journal of Economic Dynamics and Control», vol. 19.
- Goldberg, D. (1989), *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Learning*, Reading (Mass.), Addison Wesley.
- Holland, J.H., Holyoak, K.J., Nisbett, R.E. e Thagard, P.R. (1986), *Induction*, Cambridge (Mass.), The MIT Press.
- Huberman, B. e Hogg, T. (1995), *Distributed computation as an economic system*, in «Journal of Economic Perspectives», vol. 9.
- Kandori, M., Mailath, G.J. e Rob, R. (1993), *Learning, mutation and long run equilibria in games*, in «Econometrica», vol. 61.
- Kaniovski, Yu. e Young, P.H. (1994), *Learning dynamics in games with stochastic perturbations*, in «Games and Economic Behavior», vol. 11.
- Katzner, D.W. (1990), *The firm under conditions of ignorance and historical time*, in «Journal of Post-Keynesian Economics», vol. 13.
- Kauffman, S. (1993), *The Origins of Order*, Oxford, Oxford University Press.
- Kirman, A.P. (1992), *Variety: the coexistence of techniques*, in «Revue d'Economie Industrielle», vol. 59.
- (1993), *Ants, rationality and recruitment*, in «Quarterly Journal of Economics», vol. 108.
- (1994), *Economies with interacting agents*, mimeo.
- Koza, J. (1993), *Genetic Programming*, Cambridge (Mass.), The MIT Press.

- Kuran, T. (1987), *Preference falsification, policy continuity and collective conservatism*, in «Economic Journal», vol. 97, pp. 642-655.
- Kwasnicki, W. (1996), *Knowledge, Innovation and Economy*, Cheltenham, Edward Elgar.
- Lane, D. (1993a), *Artificial worlds in economics: Part I*, in «Journal of Evolutionary Economics», vol. 3.
- (1993b), *Artificial worlds in economics: Part II*, in «Journal of Evolutionary Economics», vol. 3.
- Lane, D. e Vescovini, R. (1996), *Decision rules and market share: aggregation in an information contagion model*, in «Industrial and Corporate Change», vol. 5.
- Langton, Ch. (a cura di) (1989), *Artificial Life*, Redwood City (Calif.), Addison Wesley.
- Lesourne, J. (1991), *Economie de l'ordre et du désordre*, Paris, Economica.
- Levinthal, D. (1996), *Adaptation in rugged landscapes*, in corso di pubblicazione in «Management Science».
- Lindgren, K. (1991), *Evolutionary phenomena in simple dynamics*, in C.G. Langton et al. (a cura di), *Artificial Life II*, Reading (Mass.), Addison Wesley.
- March, J.G. (1991), *Exploration and Exploitation in Organizational Learning*, in «Organization Science», vol. 2.
- (1994), *A Primer on Decision Making. How decisions happen*, New York, Free Press.
- March, J.G. et al. (1991), *Learning from samples of one or fewer*, mimeo.
- Marengo, L. (1996), *Structure, competences and learning in an adaptive model of the firm*, in Dosi e Malerba [1996].
- Marengo, L. e Tordjman, H. (1996), *Speculation, heterogeneity and learning: A model of exchange rate dynamics*, in «Kyklos», vol. 47.
- Marimon, R. (1995), *Learning from learning in economics (Towards a theory of the learnable in economics)*, Firenze, European University Institute, Working Paper.
- Marimon, R., McGrattan, E. e Sargent, Th.J. (1990), *Money as a Medium of Exchange in an Economy with Artificially Intelligent Agents*, in «Journal of Economic Dynamics and Control», vol. 14.
- Maynard-Smith, J. (1982), *Evolution and theory of games*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Montgomery, C.A. (a cura di) (1995), *Resource-based and Evolutionary Theories of the Firm*, Dordrecht, Kluwer.
- Neal, P. (1996), *Keynesian uncertainty in credit markets*, in «Journal of Post-Keynesian Economics», vol. 18.
- Nelson, R.R. (1995), *Recent Evolutionary Theorizing About Economic Change*, in «Journal of Economic Literature», vol. 33.
- Nelson, R.R. e Winter, S.G. (1982), *An Evolutionary Theory of economic change*, Cambridge (Mass.), The Belknap Press of Harvard University Press.
- Orléan, A. (1992), *Contagion des opinions et fonctionnement des marchés financiers*, in «Revue Economiques», vol. 43.

- Palmer, R.G., Arthur, W.B., Holland, J.H., LeBaron, B. e Tayler, P. (1994), *Artificial Economic Life: A simple Model of a Stockmarket*, in «Physica D», vol. 75.
- Shackle, G.L.S. (1969), *Decision, Order and Time in Human Affairs*, Cambridge, Cambridge University Press, seconda edizione.
- Silverberg, G. e Lenhart, D. (1994), *Growth fluctuation in an evolutionary model of creative destruction*, in G. Silverberg e L. Soete (a cura di), *The Economics of Growth and Technical Change*, Aldershot, Edward Elgar.
- Silverberg, G., Dosi, G. e Orsenigo, L. (1988), *Innovation, diversity and diffusion. A self-organization model*, in «Economic Journal», vol. 98.
- Silverberg, G. e Verspagen, B. (1994), *Learning, innovation and economic growth: a long run model of industrial dynamics*, in «Industrial and Corporate Change», vol. 3.
- (1995), *From the artificial to the endogenous: Modelling evolutionary adaptation and economic growth*, Laxenburg, Austria, IIASA Working Paper 95-08.
- Suppes, P. (1995), *A survey of mathematical learning theory 1950-1995*, Stanford University, mimeo.
- Topol, R. (1991), *Bubbles and volatility of stock prices: effects of mimetic contagion*, in «Economic Journal», vol. 101.
- Vriend, N. (1995), *Self-organized markets in a decentralized economy*, in «Journal of Computational Economics», vol. 8.
- Weibull, J.W. (1995), *Evolutionary Game Theory*, Cambridge (Mass.), The MIT Press.
- Winter, S.G. (1971), *Satisficing, selection and the innovative remnant*, in «Quarterly Journal of Economics», vol. 85.
- Young, P.H. (1993), *The evolution of conventions*, in «Econometrica», vol. 61.