

Teoria delle decisioni post-bayesiana

di Aldo Rustichini

1. Introduzione

Il modello di utilità attesa, derivato in forma assiomatica in Savage [1954] o in Anscombe e Aumann [1963], è il modello tradizionale di scelta in condizioni di incertezza. Questa teoria è convincente per situazioni relativamente semplici, ma è più difficile da accettare come modello appropriato del comportamento di un individuo che si trovi ad affrontare un problema nuovo, potenzialmente complesso, e di natura incerta. Come può questo individuo formulare precisamente il suo spazio degli stati, o le sue preferenze su lotterie, su atti? Per fornire una risposta a queste domande, i modelli a cui abbiamo accennato si basano su due assunzioni fondamentali, che esamineremo da vicino. Si noti comunque, prima di proseguire, che queste due assunzioni sono mantenute in sviluppi più recenti della teoria delle decisioni in condizioni di incertezza, come per esempio nella teoria della *non-expected-utility*.

La prima assunzione è che l'agente ha a disposizione una lista completa degli stati del mondo che si escludono a vicenda. Per di più, ed è ciò che è più rilevante dal punto di vista del comportamento, egli ha la certezza soggettiva che la sua lista sia completa.

La seconda assunzione è che il comportamento sotto incertezza sia regolato in base ad una probabilità soggettiva che l'agente formula sopra lo spazio degli stati, per quanto complesso sia questo spazio; e che la nuova informazione che via via si rende disponibile sia tradotta in successive revisioni di questa probabilità iniziale.

Queste due assunzioni sono ragionevoli se supponiamo che l'agente si trovi in un ambiente la cui descrizione si può ridurre a po-

Questa relazione è stata preparata per il XXXVI Convegno della Società Italiana degli Economisti, tenuto a Firenze nell'ottobre 1995. Desidero esprimere i miei ringraziamenti ai colleghi con i quali ho lavorato su vari progetti, in particolare Salvatore Modica, David Easley, Eddie Dekel, Bart Lipman, Jean-Marc Tallon. Desidero ringraziare il professor Alessandro Vercelli per il gentile invito, e lui e i partecipanti per i numerosi stimolanti commenti.

che componenti, e che si ripete nel tempo in modo sostanzialmente immutato; in altre parole, se supponiamo che l'ambiente sia semplice stazionario. È nostra opinione che la maggioranza dei problemi che sono interessanti per un economista non appartenga a questa categoria. Le varie ricerche che discuteremo partono dal tentativo di indebolire questa premessa di fondo, e in particolare le due assunzioni che abbiamo appena discusso.

2. Modelli partizionali e non partizionali

Iniziamo da un primo tentativo in questa direzione. In un modello non partizionale la struttura informativa che è a disposizione dell'agente non è generata da una partizione dello spazio degli stati (per maggiori dettagli, ma anche per una illuminante discussione di questo modello e delle sue basi concettuali, vedi Dekel e Gul [1996]).

Questo a prima vista può sembrare strano. L'informazione, presumibilmente, può essere ricondotta a segnali esterni che sono ricevuti dall'agente. Ad ogni segnale corrisponde un sottoinsieme dello spazio degli stati nel quale il segnale è generato, e la combinazione dei diversi segnali genera una partizione dello spazio stesso. Il punto che modelli non partizionali vogliono catturare però è che il processo di elaborazione della informazione (cioè, del processo di elaborazione dei segnali) non avviene necessariamente senza errori, o inconsistenze, da parte del soggetto.

Prendiamo, per illustrare questo punto e per introdurre la nostra discussione successiva, un esempio molto semplice. Abbiamo due stati di natura, a e b . Il modello che presenteremo ha una ben nota interpretazione, che consiste di una storia in cui appaiono un cane Sherlock Holmes: per i dettagli, vedi uno dei numerosi papers nella letteratura, per esempio Modica e Rustichini [1994]. Io, il decision-maker, posso distinguere fra i due stati in base a un segnale che ricevo se e solo se a avviene. Ad a vedo il segnale, e quindi so che a successo. A b , però, non vedo nessun segnale; e così accade che io dimentichi, o ignori, che questo fatto implica che a non può essere, e dunque considero ancora a e b possibili. La mia struttura informativa in questo caso è non partizionale. Per riassumere in modo più formale, se l'insieme degli stati che considero possibili in un certo stato ω è denotato da $P(\omega)$, abbiamo:

$$\Omega = \{a, b\}$$

$$P(a) = \{a\}, P(b) = \{a, b\};$$

che è appunto un modello non partizionale. Cosa implica questo in termini di quello che conosco? Definiamo come di consueto $K : 2^\Omega \rightarrow 2^\Omega$ con

$$K(E) = \{\omega \in \Omega : P(\omega) \subseteq E.\}$$

Dunque, gli stati in $K(E)$ sono gli stati di natura in cui io so che l'evento E è vero. Applichiamo questo al modello precedente, e determiniamo l'insieme degli stati dove è vero che io so che non so a , cioè $K(\neg K\{a\})$. Troviamo che:

$$K(\neg K\{a\}) = K \neg \{a\} = K(b) = \emptyset$$

Dunque a b non solo non so che a è vero (dopotutto, a non è vero a b), ma anche non so di non sapere che a è vero.

Perché pensiamo che questo non sia molto convincente? Abbiamo visto che:

$$K\{b\} = \emptyset$$

cioè che io non so mai che b è accaduto. Ma allora si trova facilmente che l'insieme degli stati in cui so di non sapere b è

$$K(\neg K(\{b\})) = K(\Omega) = \Omega$$

cioè io so in ogni stato di non sapere b . Quindi io non so di non sapere a , ma anche so che non so non a . Ma a e non a sono solo due facce della stessa medaglia. Come è possibile che qualcuno abbia in mente a , senza anche avere in mente la possibilità della sua negazione? Queste osservazioni suggeriscono una condizione naturale per un concetto ben formulato di inconsapevolezza (*unawareness*), e perciò definiamo formalmente:

Assioma di Simmetria Io sono consapevole di una proposizione se e solamente se sono consapevole della sua negazione.

Siamo ora pronti per una trattazione formale del concetto di inconsapevolezza.

3. Inconsapevolezza

Piuttosto che con eventi, lavoreremo con proposizioni, ma il legame fra i due modi di dare un modello formale di conoscenza è chiaro: l'insieme degli stati del mondo dove una proposizione è vera è

l'evento che corrisponde a quella proposizione. Per esempio, l'evento «elezioni anticipate» e l'insieme degli stati del mondo in cui ci sono elezioni anticipate.

Ora possiamo dare una definizione formale:

Definizione: Io non sono consapevole di un evento se non lo so, non so di non saperlo, e così via *ad infinitum*.

Ne segue anche, naturalmente, che io sono consapevole di un evento se o lo so, o so di non saperlo, e così via. Per ragioni tecniche questo concetto è difficile da rendere in modo formale. Infatti, come abbiamo appena visto, la definizione di essere inconsapevole o la sua negazione richiedono una congiunzione infinita (o una disgiunzione infinita) di sentenze; quindi sarebbe necessaria una logica infinitaria.

Qui l'assioma di simmetria viene in aiuto: si può infatti dimostrare che con questo assioma se non so qualcosa, e non so di non saperlo, allora anche ogni altro passo successivo sarà vero: non so di non sapere di non sapere... per ogni iterazione.

Oltre ad essere intuitivamente convincente, dunque, l'assioma di simmetria è una condizione importante per la costruzione della intera teoria.

Lasciamo ora al lettore il compito, nel caso che voglia, di leggere i dettagli della teoria in Modica e Rustichini [1994; 1996]; ma vedi anche Dekel, Lipman e Rustichini [1998], e procediamo invece ad esaminare alcuni dei problemi, estensioni ed applicazioni.

4. Eventi imprevisti ed imprevedibili

Per come abbiamo usato il termine fino ad ora, un evento imprevisto è un evento che l'agente non ha considerato, anche al momento di «decidere», o esplicitare, le sue probabilità soggettive. Questo, però, può succedere per due ragioni diverse, che ora vogliamo differenziare.

Diciamo, come prima approssimazione, che un evento è imprevisto se l'agente non ha pensato a quell'evento, e che l'evento è imprevedibile se egli non capisce alcuni dei concetti fondamentali che lo definiscono. Questa distinzione non è precisa come sarebbe desiderabile: per esempio, essa dipende in modo essenziale dal modo in cui i concetti «rilevanti» sono presentati all'agente. Venti anni fa egli non avrebbe capito il concetto di AIDS, ma avrebbe compreso il concetto di una malattia mortale che colpisce i meccanismi di difesa immunitari del malato.

Un semplice test per distinguere fra le due possibilità può essere

quello di menzionare all'agente l'evento in questione. Se l'evento è imprevedibile, allora egli certamente prenderà il nostro accenno come un commento incomprensibile. Al contrario, se l'evento era solo imprevisto il suo atteggiamento cambierà radicalmente, perché ora egli comprende quello che gli abbiamo detto, e ripenserà alla sua stima delle probabilità.

Naturalmente, una volta posta in questi termini, vediamo che la discussione fino ad ora riguardava eventi *imprevedibili*. Inoltre la distinzione fra eventi imprevisti ed eventi con bassa probabilità diventa più vaga ed imprecisa. Purtroppo questo secondo tipo di eventi sembra avere poco interesse. La probabilità, si può dire, è zero o non lo è. E se è zero, allora l'evento è irrilevante, e può essere ignorato. Questa semplice affermazione, però, non è del tutto vera. In particolare può non esserlo se le conseguenze che l'agente si trova di fronte sono di natura del tutto diversa. Può darsi, per esempio, che il nostro agente dia a fama e gloria un peso del tutto diverso, superiore in ogni ordine, a quello che dà al pane. O, dall'altro lato, può dare alla possibilità di andare in bancarotta un peso superiore ad ogni altra considerazione. Una teoria delle decisioni in queste situazioni è sviluppata in Modica e Rustichini [1996]. Uno dei risultati più importanti è che dal punto di vista di un osservatore esterno l'individuo si comporterà come qualcuno che ha una utilità che dipende dalla probabilità (una forma speciale di utilità che dipende dallo stato). In particolare, più improbabile è l'evento, più la sua utilità ignorerà alcune delle conseguenze. Una teoria della utilità di questo tipo, che possiamo chiamare *belief dependent*, è parte dell'analisi in Modica e Rustichini [1996].

epistemico?

5. Teoria delle decisioni in situazioni complesse

1HP

Abbiamo esaminato fin qui un modello epistemico alternativo di conoscenza, in cui gli agenti possono non essere consapevoli di tutto. Procediamo ora ad esaminare la seconda assunzione, e cioè che la scelta in condizioni di incertezza sia sempre basata su probabilità soggettive. Consideriamo un individuo che deve compiere una scelta fra due possibili azioni. Dopo che ha fatto la sua scelta, natura sceglie a sua volta uno dei possibili stati e l'individuo riceve un pagamento (payoff) basato sulla sua azione e sullo stato di natura. Se il processo che natura usa per scegliere gli stati è noto all'individuo, allora la teoria della utilità attesa è una teoria plausibile, anche se non una predizione perfetta, del suo comportamento.

Ma ora supponiamo che il processo sugli stati non sia noto all'individuo. Un agente che massimizza la utilità attesa assegnerebbe una probabilità soggettiva *ex ante* sullo spazio di tutti i possibili processi e procederebbe ad agire e a modificare le sue probabilità in modo bayesiano. Come abbiamo detto prima, questo modello ha delle grosse limitazioni.

Prima di tutto, questo comportamento segue una procedura incredibilmente complessa. Quindi questo modello può essere utile come un modello normativo, ma è meno credibile come modello descrittivo. Si può obiettare che questo è in realtà un modello di tipo *as if*, o che vuole dare una descrizione idealizzata della realtà; e che quindi dovremmo solo occuparci delle predizioni che esso fornisce circa le probabilità soggettive e il comportamento, e non circa il processo di decisione stesso. Questo però porta ad una seconda difficoltà. A meno che la probabilità soggettiva sia nota al teorico, le predizioni sul comportamento per ogni tempo finito (al di là della predizione ovvia, ma debole, che l'individuo non sceglierà azioni dominate) sono pochissime. Si può anche obiettare che l'interesse in questo modello deriva dalle predizioni asintotiche. Questo punto conduce ad una terza difficoltà. In una situazione relativamente semplice un agente bayesiano il cui *prior* contiene il vero valore del parametro apprenderà il vero valore asintoticamente, e quindi asintoticamente si comporterà come se conoscesse il vero valore. Ma in un ambiente abbastanza complesso questa intuizione non è più vera. Ancor più grave è il fatto che le predizioni del futuro, condizionali alla storia osservata, non convergono alla verità.

5.1. Un modello di apprendimento

In Easley e Rustichini [1996] proponiamo un modello semplice di comportamento che cerca di superare queste difficoltà. Il trattamento che proponiamo è ancora assiomatico: ma ora, invece che direttamente sulle scelte dell'agente, gli assiomi sono imposti sulle procedure che egli usa per selezionare le sue scelte. Gli assiomi che proponiamo sono ragionevoli. Due (monotonicità e simmetria) richiedono semplicemente questo. Il primo, che l'agente preferisca *payoffs* più alti, e quindi privilegi procedure che scelgano azioni con *payoffs* potenzialmente più alti. Il secondo, simmetria, richiede che la numerazione delle azioni sia irrilevante. Due assiomi addizionali completano il quadro. Il terzo assioma è la generalizzazione per il nostro caso della condizione di indipendenza. Il quarto richiede che il peso assegnato alla evidenza

passata non sia inferiore a quello assegnato alla evidenza presente, e può essere interpretato come una condizione di memoria perfetta. Dimostriamo che con queste assunzioni il comportamento dell'agente ha una semplice rappresentazione, che si può esprimere come una revisione di pesi assegnati alle diverse azioni. Asintoticamente viene scelta un'azione ottimale, che coincide con l'azione che massimizza una trasformazione crescente della utilità attesa. Con una versione più forte del terzo assioma si ottiene che le procedure dell'agente sono semplicemente trasformazioni monotoniche del replicator dynamic.

Riferimenti bibliografici

- Anscombe, F. e Aumann, R. (1963), *A Definition of Subjective Probability*, in «Annals of Mathematical Statistics», 34, pp. 199-205.
- Dekel, E. e Gul, F. (1996), *Rationality and Knowledge in Game Theory*, Congresso del 1996 della Econometric Society.
- Dekel, E., Lipman, B. e Rustichini, A. (1998), *Standard State Space Models Preclude Unawareness*, in «Econometrica», 66 (1), pp. 159-173.
- Easley, D. e Rustichini, A. (1996), *Choice without Beliefs*, CORE DP.
- Modica, S. e Rustichini, A. (1994a), *Awareness and Partitional Information Structures*, in «Theory and Decision», 37, pp. 107-124.
- (1994b), *Unawareness: a Formal Theory of Unforeseen Contingencies*, in *Games and Economic Behavior*, in corso di pubblicazione.
- (1996), *Belief Dependent Utility*, CORE DP.
- Savage, L.J. (1954), *The Foundations of Statistics*, New York, Dover Publications.